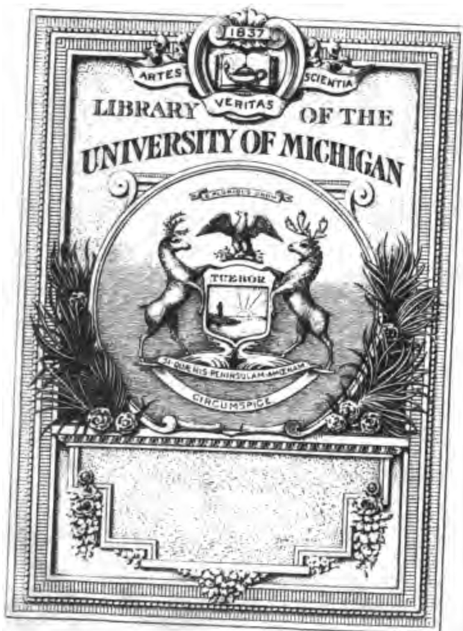

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

EPISAGOGICON GEOMETRICUM,

SIVE

PRIMITIVA MATHESIS INITIA:

UBI

Definitiones, Divisiones, Postulata, & Axiomata traduntur, quibus inscii primò imbui solent, ut paratiores ad Elementorum Euclidis libros habeantur.

Collecta, & illustrata, atque ad faciliorem Tyronum captum accomodata, Sollicitudine, ac Studio.

Benedetto

P. F. BENEDICTI MARIA CASTRONII PANORMENSIS, Ordinis Prædicatorum, *MATHESEOS PROFESSORIS.*

VENETIJS, Typis Gonzatti 1705.

Superiorum Licentia.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ILLVSTRISSIMO,
ET EXCELLENTISSIMO DOMINO
DOMINO
BERNARDO ARIZZIO
DVCI SANCTI PHILIPPI,
BARONI SANCTI MARTINI,
SERRI, CADIMELI.

Domino Magnæ Gallirae, Trebalatæ, Calambreri, Galermo, Pendenti, S. Jacobi, Imperatorii, Seraduccelli, Migliofulo, Cintæ, Gallæ, Xabuscæ: Fluminum Planteræ, Propensi, Golfaresti: necnon perpetuo Arcis Mazzarelli Hyperrectori, &c.

SORORIO MEO PERDILECTO.

ùm tandem ad Mathesis Studia nonnunquam animum calamumque converterim, eamq; nuper Alumnos edocendi munus susceperim, dextro mihi contigit alite, meũ hoc ex communibus Authorum placitis, quod Tibi consecro, Dilectissime Domine geometricum contexere Episagogi-

gicon, eo ſcilicet ordine digeſtum, quem in ipſa Tyronum inſtitutione compererim aptiorem; quod, licet in meum dumtaxat uſum elucubratum aliquandiù apud me retinerem, nec de editione cogitarem; flagitantibus tamen diſcipulis, amicorumque ſuaſu, eò me paſſus ſum adduci, ut Tuis quoque juſſibus obtemperans, illud in lucem prodire permiſerim. Tibi ergo præ aliis meritò dicatas volui mei laboris primitias; Tibi ſcilicet, quem ſi felix Neceſſitudo dedit, ut unicum amem Fratrem, tribuit bonitas Tua, ut magnanimum etiam ex Tuis Caſtroniorum familiæ ſpirantis expectem Inſtauratorem: & ſi Te perexcellens animi Tui majeſtas fecit, ut benevolum experiar Dominum, ſanè peracris ingenii Tui ſublimitas mihi præceptorem etiam dare potuit. Et certè præclarum illud vegetæ Tuæ Mentis acumen haud parùm Matheſin noſtram illuſtraſſet, ſi graviores Tibi regiminum curæ plus ocii indulſiſſent: Tibi enim congenita ſemper illa fuit, qua ſcientias excoleres, virtuteque præditos viros benignè foveres, ac adamares, propenſio & ſollicitudo. Verùm hìc ſollemnia, & operosè quæſita nuncupationum blandimenta haud à me velim expectes. Nam quid de ſumma Tua pietate colendum potiùs quàm imitandum ſit, cùm

præ-

Licentia Reverendissimi Patris GENERALIS.

Nos Fr. ANTONINUS CLOCHE Sacræ Theologiæ Professor, ac totius Ordinis Prædicatorum humilis Magister Generalis, & Servus.

CUm uti nobis exponitur R. P. Lector Fr. Benedictus Maria del Castrone Provinciæ nostræ Trinacriæ opus, cui titulus: *Episagogicon Geometricum, in quo prima Mathesis initia, quibus rudes primò imbui solent, traduntur, &c.* composuerit, illudque prælo subiicere desideret; Nos harum serie; nostrique officii authoritate, quantum in nobis est, & servatis aliis de jure servandis paternè indulgemus. In nomine Patris, & Filii, & Spiritûs Sancti Amen. In quorum fidem, &c. Dat. Romæ in Conventu nostro S. Mariæ super Minervam die 6. Januarii 1703.

FR. ANTONINVS CLOCHE
Magister Ordinis.

Locus ✠ sigilli. *Registrata fol. 15.*

Fr. Thomas Ripoll Magister, & Socius.

BENEVOLO STUDENTI.

UÆ ſit & quanta Matheſis præ naturalibus diſciplinis excellentia, & utilitas, non unius paginæ res eſt, nec prolixâ quidem hic oratione rependam; cùm plures extent emeriti hujus ſcientiæ Scriptores, quibus mea addere non præſumo, niſi potiùs videar, & illorum encomia tranſcribere. Sed loquantur Sacræ literæ, quæ DEUM Optimum Maximum omnia in Numero Pondere, & Menſurâ, quaſi juxtâ Arithmeticæ, Staticæ, & Geometriæ canones mathematicè condidiſſe docent. *Quando enim præparabat Cœlos: quando gyro vallabat abyſſos: Quando Æthera firmabat ſurſum, & librabat fontes aquarum: quando circumdabat mari terminum ſuum, & legem ponebat aquis: ne tranſirent fines ſuos: quando appendebat fundamenta terræ*: nonniſi Matheſin exercere, atque juxtà Architectonicæ leges admirabili Sapientiâ cuncta compoſuiſſe videtur. Ita ut quandoque interrogatus Plato, quid in incomprehenſibili lucis illâ, & Æternitatis Abyſſo perageret DEUS, haud perperam reſponderit, *Geometrizat*, quaſi ſenſerit Artem DEI conditricem, Matheſin eſſe. Conclament græca Licæa, quæ Matheſin ſcientiarum omnium parentem, imò *Doctrinam* antonomaſticè, ob maximam ſui certitudinem, & evidentiam, quaſi præ alijs ipſa ſola doceret, nuncuparunt, foribus etiam programmate præfixo, ne quis

expers Geometriæ Scholas ingredi auderet. Sufficiant tandē quæ de Naturâ, & Progressu Matheseos nitidè nō minùs ac eleganter exponit Vir undequaque summus, ac nunquam satis laudatus P. Claudius Franciscus Milliet Dechales clarissimæ Societatis Jesu in suo Mundo Mathematico, ubi dignas Scientiæ laudes enarrans, Mathesin asserit omnium esse fundamen scientiarum, ac, veluti truncum surculos, virtute & energiâ cæteras continere Scientias, primitùs propterea solitam addisci, ut ob indubitatam firmitatem discentium animos solidaret, & ad reliquas capessendas idoneos redderet: suasque demōstrationes teste Aristotele primas sibi certitudinis partes vendicare; & secundùm Platonem Mathemata mediæ cujusdam conditionis existere inter sensibilia, & æterna. Unde non mirùm, si tam severè in Xenocratis Scholâ prædiscendæ Matheseos sancita lex est, ut qui illius præsidio esset destitutus; lanificio potiùs, aut cuicumque ignobiliori artificio, quàm Philosophiæ, cujus ansas non haberet, aptior videretur. Ostendit tandem Mathesin per omnes Scientias ubique facem præferentem, sicque concludit, ad universam Philosophiā, ad civilem hominum Vitam, atque in artibus perficiendis, aut promovendis disciplinis necessariam non minùs esse Mathesin ac perutilem. At quàm plurimos ab hujusmodi Studijs avocet mathematicorum imperitia terminorum, satis experiuntur omnes, qui, & si sufficienter literis imbuti, ad reliquas aggrediendas videantur æquè

prom-

prompti facultates; cùm tamen egregiâ Mathesis pulchritudine capti, aliquod ejus expedere velint Theorema, aut solvere Poblema; maximam experiri solent difficultatem, nimisque in ipso ingressu trepidare, atque hunc in lapidem eò fortiùs impingere, quò segniùs à terminorum intelligentiâ distaverint. Habet enim hoc Mathesis, ut quantò sit in ratiocinijs evidens, tantò in vocabulis abstrusior, & quò delectabiliorem in demonstratione se ostendat, eò difficilior in propositione compareat. Videtur quippe Medicus Juris expers absque labore ingente legisperitorum assertiones æquè concipere; sicut Jurista effata Medicinæ. Item Philosophus Theologorum facilè ratiocinia intelligere, sicut Theologus præfatorum eminenter cōprehendere veritates: obvijs enim atque communibus uti solent terminis; Ita ut non sit qui mediocribus literis eruditus non nihil sibi suadeat ex contingente quacumque ejusmodi librorum lectione delibare. At ubi ad Mathemata devenitur protinus formidant omnes, lecta videntur impervia, hærent in vestibulo, caligant oculi, mens retrocedit; ipseque jam refugit addiscendi appetitus, fastidiens quoque quod summopere exquisierat: non aliunde, quam ob inscientiam terminorum. Nam etsi primigenia cunctis sit hominibus sciendi cupiditas; quàm tamen multos Scientiæ labor deterreat, quos usus delectaret; Quamque plurimos à labore divertat terminorum inscitia, quos utique alliceret isagogicorum vel rudis informatio; nemo

non

non videt. Unde multi propterea se avertunt potiùs ab ignoratione terminorũ abducti, quàm ex modicâ fortè doctrinæ utilitate distracti, nolentes plus illud laboris impendere in addiscendis hujus Scientiæ propriis, eo, quem cæteris adhibuerint. Tantam igitur, Amice Tyro, benemerentissimæ Disciplinæ jacturam ægrè ferens, tuæque studens utilitati, haud superfluũ fore existimavi, si post alia Authorum eruditissima volumina adhuc modicus liber Alumnorum manibus suppeditetur, qui brevitate cõmodus, methodo novissimus, QUID, & QUOTUPLEX omnium ferè terminorum ad universalem puramq; Mathesim spectantium referret, quibus agnitis per totum possis Mathematum absque ulla hæsitatione viridarium feliciter expatiari. Ideoque Episagogicon hoc geometricum confeci, in quo ex pluribus Mathematicis omnes ferè terminos, & effata eorumq; Definitiones, & Divisiones quæ præsertim ad Euclidis libros præmitti solent, novâ serie compilavi, quam scilicet pluribus in locis quotannis discipulos docens Tyronum captui deprehendi accomodatiorem, ut nihil in promptu tuæ desit Studiorum cupidini, nec meo te juvandi desiderio. Excipe ergo, quas tuæ utilitati confero, mei laboris primitias; ubi si quid boni, quod tibi faciat, invenias, DEO cui est da gloriam; si verò quod tibi displiceat, parce primitijs. Vale.

EPISAGOGICI GEOMETRICI
SECTIO PRIOR;

In quâ

Definitiones, & Divisiones explanantur, quæ ad Elementorum Euclidis libros præmittuntur.

CAPUT PRIMUM

De Mathesi, & Quantitate.

§. I.

Quid, & quotuplex Mathesis?

1 MATHESIS græcum est vocabulum, quod absolutè consideratum *penultimâ* tum *correptâ*, tum *productâ* dici potest.

2 *Mathesis* nomen *penultimâ correptâ*, etsi propriæ ethymologiæ vi *scientiam omnem, doctrinamque in genere* significare, quamplures fateantur Authores; speciali tamen jure illi tribui solet Facultati, quæ circa *Quantitatem* versatur; utpotè, quæ inter naturales scientias, *certitudine principiorum, veritate propositionum*, atque *evidentiâ demonstrationum*, adeò cæteras antecellit, ut sola quasi præ omnibus videatur germinam *Scientiæ* ideam discentium animis ingenerare: cunctaq; docens non ad sensus, nec ad opinionis probabilitatem; sed ad certam perspicuamque rectæ Rationis normam exigere. Imò ipsarum plurimas, præsertim

Physicas, in se ita complectitur, ut, quidquid evidentis in eis est, aut Mathesi deberi, aut ejus fulciri fundamentis, nemo non videat. Qua de re tanti erat apud Antiquos, quòd ad illas capessendas nemini Xenocratis, Platonisque Scholas adire licebat, quin prius Matheseon gnarus videretur: quasi senserint sine illius præsidio ad alias eniti scientias, idem esse, ac sine alis ad volatum accingi; Ut pulcherrimè ponderat P. Dechales Matheseos celeberrimus ævi nostri Professor *in tract. proëm. de progressu Mathes. In Mathesi quippe velut in trunco surculi virtute, & energiâ cæteræ continentur scientiæ, aut saltem eâ obstetricante in lucem prodeunt.*

3 *Matesis penultimâ productâ* nomen est *Artis Divinatoriæ*: Cujusmodi *Mantice* seu *Mantia* cum suis speciebus; putà, *Geomantia*, *Hydromantia*, *Necromantia*, & *Pyromantia*; nec non *Haruspicium*, *Augurium*, & *Auspicium*. Insuper *Sortilegium*, & *Præstigium*: Item *Astrologia Judiciaria*, *Metoposcopia*, *Phisiognomia*, *Chyromantia*, cœteraque futilia Erronum deliramenta. Juxta illud.

Scire facit Mathesis, sed divinare Matesis.

4 Mathesis igitur in proposito nostro Scientia est, quæ demonstrativè circa *Quantitatem* versatur: estque duplex, *Pura* scilicet & *Mixta*.

4 *Mathesis pura* Quantitatem considerat purè intelligibilem, atque ab omni sensibili materiâ penitus abstractam. Cujusmodi sunt *Arithmetica*, & *Geometria*.

6 *Mathesis verò mixta* Quantitatem concernit ad certum sensibile genus jam determinatam, & cum peculiari subjecto connexam; quæ propterea *Physico-mathematica* nuncupari solet, quasi ex *purâ* Mathesi, & *Physicâ* Facultate mixta; Cujus munus est *puræ* Mathesis ideas, & speculationes ad sensibiles corporum affectiones transferre. Cujusmodi sunt, *Astronomia*, *Geodesia*, *Musica*, *Statica* &c: quæ scilicet genera subjecta à Physicis mutuantur, causas verò in demonstrationibus ex superiore Mathesi repetunt. Nam (ut benè distribuit Siculus noster *Fardella* in suo præliminari ad universalem Mathesin introitu) si pura Mathesis ap-
„ plicetur Sono, hæc dicitur *Musica*; si Terræ mensu-
„ randæ, *Geodesia*; si Aquarum magnitudini, *Hydro-*

grá-

„ graphia; si Ponderi, *Statica*; si Virtuti Motrici, *Me-*
„ *chanica*; si Syderum Motibus, *Astronomia*; si Radiis
„ Directis, Refractis, aut Reflexis, *Optica*, *Dioptrica*,
„ aut *Catoptrica*; si Ædificiis, aut Urbium Munimen-
„ tis, *Architectura Civilis*, aut *Militaris* &c: pro ut in
arbore appositâ est videre.

§. II.
Quid, & quotuplex Quantitas?

1 QUantitas pro ut *Mathesis* est *objectum* nihil aliud est, quàm *in partes extensio*: habetque propterea esse divisibilis, atque suscipere Majus, & Minus.

2 *Quantitas* primò dividitur in *Continuam*, & *Discretam*.

3 *Quantitas Continua* est extensio in partes *simul unitas*, seu *termino communi copulatas*: quæ unico vocabulo *Magnitudo* nuncupatur.

4 *Quantitas Discreta* est extensio in partes *ab invicem disiunctas*, atque *diversis terminis affectas*: quæ propterea *Multitudo* vocitatur.

5 Insuper *Quantitas* vel solâ Mente concipitur; & sic dicitur *Intelligibilis*, quam respicit *pura Mathesis*: vel à sensibus etiam attingitur; & sic dicitur *Sensibilis*, circa quam *mixta* Mathesis versari videtur, ut dictū est.

6 Rursus *Quantitas* vel consideratur in ordine ad meras suas partes, quas continet, & sic dicitur *Absoluta*: vel consideratur in ordine ad aliam Quantitatem, & sic appellatur *Relativa*.

7 *Pars* & *Totum* sunt notissimæ voces totam Quantitatis essentiam explicantes. *Pars* enim dicitur omnis minor quantitas cum majore comparata, sive re verâ contineatur in majore, sive non; modò sit æqualis alicui quantitati in majore contentæ. *Totum* verò dicitur omnis major quantitas cum minore comparata, sive re verâ ipsam contineat, sive non. Et quia Totum aliquando ab aliqua sui parte pluries repetitâ præcisè mensuratur, aliquando non; ideo

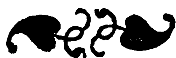
8 Dividitur hìc *Pars* genericè in *partem* & *partes*, idest in *partem aliquotam*, & in *partem aliquantam*.

9 *Pars*, seu *pars aliquota* ex V, & VII. Euclidis
Def. 1. 5. Elemento sic definitur, *est quantitas quantitatis mi-*
3. 7. *nor majoris, cùm minor metitur majorem.* Hoc est minor quantitas, quæ aliquoties sumpta seu repetita majorem præcisè adæquat. Ut quantitas bipalmaris dicitur *pars* seu *pars aliquota* quantitatis quadripalmaris, quia bis sumpta quadripalmarem exactè metitur, & adæquat.

10 *Partes autem*, seu pars aliquanta, *cùm non me-*
Def. 4. 7. *titur.* Hoc est minor quantitas, quæ aliquoties sumpta, majorem præcisè non adæquat, sed vel eam excedit, vel exceditur ab eâ. Ut quantitas 3 non est pars aliquota, sed aliquanta quantitatis 10, nimirum tres ejus decimæ *partes*, quia ter sumpta exceditur à 10, & quater sumpta excedit 10.

11 *Multiplex verò est major minoris, cùm majo-*
Def. 3. 5. *rem metitur minor.* Hoc est illud Totum seu major quā-
5. 7. titas, quæ à minore aliquoties sumptâ præcisè mensuratur. Ut quantitas 10. dicitur *Multiplex* quantitatis 2, quia 2 quinquies sumpta præcisè metitur, & adæquat totam 10.

12 Porrò cùm *discreta* Quantitas prior videatur *continuâ* (priùs enim est *Unum*, postea *Punctum*: si quidem, ut Pythagoreis placet, Punctum est unitas situm habens; Unitas verò est punctum situ vacans): haud incongruū esse, arbitror, à Discretâ Quantitate sermonem inire. Quandòquidem etiam comperimus Tyrones Arithmeticis initiatos perspicaciores reddi, ac prōptiores ad cœteras disciplinas capessendas; ita ut Avenzoarres asserere non dubitarit: *Omnia scire eum, qui noverit numerare*; & Plato *Arithmeticam vestibulum scientiarum* vocet. Quia tamen Discreta quantitas est mensura Continuæ æquum est, plurima, quæ in sequente Capite docentur communiter pro utrâque intelligi Quantitate.



CA-

CAPUT II.

De Quantitate Discretâ.

1 Q*Vantitas discreta* (ut supra diximus) est ex-sio in *partes absolutas*, atque ab *invicem disjunctas*.

2 *Unitas est, secundùm quam entium quodque dicitur unum*. Def. 1. 7.

3 *Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo*: Unde tot partes habet aliquotas, quot unitates. Def. 2. 7.

§. I.
De Quantitate discretâ absolutâ.

1 P*Ar numerus est, qui bifariam dividitur*: Ut 2. 8. 6. 4. 10. &c. Def. 6. 7.

2 *Impar verò, qui bifariam non dividitur. Vel qui unitate differt à pari.* Ut 3. 7. 5. 9. 13. &c. Def. 7. 7.

3 *Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerũ parem.* Ideft, cujus omnis pars aliquota præter unitatem est numerus par. Ut numerus 32, quem numerus par 4 metitur per parem 8: atque adeò omnis ejus pars aliquota præter unitatem, putà 2, 4, 8, est numerus par. Def. 8. 7.

4 *Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.* Ut 6, quem 2 metitur per 3. Def. 9. 7.

5 *Impariter verò impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.* Ideft, cujus omnis aliquota pars est numerus impar. Ut 15, quem 3 metitur per 5. Def. 10. 7.

Coroll. Numerus *pariter par*, sicut & *pariter impar*, semper est numerus *par*; At *Impariter impar* semper est numerus *impar*.

6 *Primus numerus est quem unitas sola metitur.* Ideft, qui nullam partem aliquotam habet unitate majorem. Ut 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. &c. Def. 11. 7.

Com-

Def. 13. 7. 7 *Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur*. Ideft, qui partem habet aliquotam unitate majorem. Ut 4. 6. 9. 10. &c.

8 Quatuor sunt primariæ numerorum combinationes, quæ totius Arithmeticæ elementorum nomen meritò sibi vendicant; nimirum, *Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio*; quarum praxes in III fusè subjiciemus Paragrapho, contenti solas hic earum definitiones prælibare.

9 Numerorum *Additio* est inventio alicujus numeri, qui tot unitates in se contineat, quot fuerint in omnibus datis numeris simul sumptis unitates. Inventus autem numerus vocatur *Summa*, seu *Aggregatum*. Ut 4 & 6 simul additi faciunt 10, qui vocatur Summa seu Aggregatum.

10 Numerum verò ex numero *subtrahere*, est excessum invenire, quo major numerus minorem superat. Excessus autem vocatur *Differentia* seu *Residuum*. Ut si auferas 4 ex 6, excessus 2 erit eorum Differentia seu Residuum.

Def. 15. 7. 11 *Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in illo multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis*. Hoc est numerum per numerum multiplicare, seu, quod idem est, numerum in numerum ducere, est invenire numerum, in quo Multiplicatus toties contineatur, quoties unitas in Multiplicante. Inventus autem numerus, ex Multiplicante, & Multiplicato procreatus, vocatur *Productum*. Ut multiplicare 4 per 5, est invenire Productum 20, in quo toties continetur Multiplicatus 4, quoties unitas in multiplicante 5; nempe quinquies.

12 Numerum per numerum *dividere* est alium numerum invenire, qui per suas unitates indicet, quoties minor numerus, qui Divisor est, contineatur in majore, qui est Dividendus. Inventus autem numerus vocatur *Quotiens*. Ut dividere 15 per 5 est invenire Quotientem 3, qui per tres suas unitates ostendit, Divisorem 5 ter contineri in Diviso 15.

Def. 16. 7. 13 *Cùm autem duo numeri mutuò sese multiplicantes quempiam faciunt, qui factus erit, Planus appel-*

pellabitur; qui verò numeri sese multiplicarint, illius Latera dicentur. Hoc est Numerus *planus*, qui producitur ex mutuâ multiplicatione duorum numerorũ, qui proinde illius *Latera* dicuntur. Ut numerus 6, qui producitur ex 2 ducto in 3. dicitur *planus*, ejusque *latera* sunt ipsi numeri 2, & 3.

14 *Cùm verò tres numeri mutuò sese multiplicantes quempiam faciunt, qui procreatus erit Solidus appellabitur, qui autẽ numeri mutuò sese multiplicarint illius Latera dicentur.* Hoc est numerus *Solidus* est, qui producitur ex mutuâ multiplicatione trium numerorum, qui etiam ejus *latera* dicuntur. Ut si numerus 3 multiplicetur per 4, & horum Productum 12 iterum multiplicetur per 2: hoc ultimum Productum 24 vocabitur numerus *solidus*; tres verò illi numeri 3.4.2. ejus *latera* dicuntur. Def. 17.7.

15 *Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui à duobus æqualibus numeris continetur.* Hoc est *Quadratus* dicitur ille numerus *planus*, qui producitur ex multiplicatione duorum æqualium numerorum, sive ex uno in seipsum ducto, quorum uterlibet est illius *Radix quadrata.* Ut numerus 9, qui producitur ex 3 ducto in 3, est *Quadratus*, cujus *Radix quadrata* est ipse 3. Def. 18.7.

16 *Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui à tribus æqualibus numeris continetur.* Hoc est numerus *solidus*, qui producitur ex multiplicatione trium numerorum æqualium, quorũ quilibet est illius *Radix Cubica.* Ut numerus 8 est *cubicus*, quia producitur ex tribus binariis 2. 2. 2. bis, duo, bis: bis enim duo faciunt quatuor, & bis quatuor producunt *cubum* 8, cujus *cubica Radix* est ipse 2. Def. 19.7.

17 *Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.* Ut numerus 6, cujus omnes aliquotæ partes nempe 1, 2, & 3 simul sumptæ ipsum 6 præcisè adæquant. Def. 22.7.

§. II.
De Quantitate relatâ.

1 QUantitates ejuſdem generis dicuntur, quæ valent invicem comparari, de quibus ſcilicet affirmari poteſt, quòd æquales ſint aut inæquales. Ex quo ſanè intelliges, lineam ver: gra: non eſſe ejuſdem generis cum ſuperficie, nec ſuperficies cum ſolido: quantumvis enim concipiatur magna linea, aut ſuperficies, nunquam hæc minimum ſolidum, nec illa minimam ſuperficiem adæquare valebunt; quare nec invicem comparari poſſunt, nec proinde ejuſdem generis eſſe dicuntur quantitates.

Duæ tamen quantitates ejuſdem generis poſſunt dici vel *commenſurabiles*, vel *incommenſurabiles*. Nam ut in continuâ quantitate definit Euclides.

Def. 1. 10. 2 *Commenſurabiles magnitudines dicuntur illæ, quas eadem menſura metitur*. Hoc eſt, quando in rerum naturâ adeſt alia Quantitas, quæ ſit illarum pars quævis aliquota. Ut quantitas decempedalis dicitur *commenſurabilis* cum quantitate hexapedali; quia adeſt alia quantitas nempe bipedalis, quæ pars eſt aliquota utriuſque.

Def. 12. 7. 3 Sic *Primi inter ſe numeri*, ſeu reſpectivè Primi, *ſunt, quos ſola unitas menſura communis metitur*. Ideſt, qui nullam partem aliquotam communem habent unitate majorem. Ut 2 & 3: 3 & 5: 4 & 7, &c: qui bini *commenſurabiles* ſunt per ſolam unitatem.

4 *Compoſiti autem inter ſe numeri*, ſeu reſpectivè

Def. 14. 7. Compoſiti, *ſunt, quos numerus aliquis menſurâ communis metitur*. Ideſt, qui partem aliquotam communem habent unitate majorem. Ut 4 & 6 habent 2 menſuram communem. 10 & 15 habent 5, &c.

5 *Incommenſurabiles verò magnitudines dicun-*

Def. 2. 10. *tur hæc, quarum nullam menſuram communem contingit reperiri*. Hoc eſt, quando non cognoſcitur alia quantitas, quæ ſit illarum communis menſura. Unde hujuſmodi incommenſurabilitas nonniſi inter continuas Quantitates cadere poteſt, quarum ſcilicet altera

ne-

nequeat ex primi numeris. Omnes enim numeri sunt inter se commensurabiles saltem unitate.

6 *Ratio* (quam in continuâ Quantitate definire videtur Euclides) *est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam, secundùm quantitatem habitudo.* Hoc est illa *Relatio*, qua mutuò comparantur duæ Quantitates ejusdem generis, secundùm *æquale*, aut *magis*, & *minùs*. Def. 3. 5.

7 *Rationem habere inter se quantitates dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare.* Hoc est, ut Rationem habere dicantur inter se duæ Quantitates non solùm requiritur, ut sint ejusdem generis Quantitates, sed etiam oportet, quòd utravis earum per multiplicationem aucta, tandem possit alteram *excedere*: adeoquòd, si alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram superare posset, tunc illæ Quantitates (quamvis ejusdem generis) nullam habere dicuntur inter se Rationem. Sicque intelliges, lineam nullam habere Rationem cum superficie, nec superficiem cum solido, utpotè quæ non sint ejusdem generis quantitates. Similiter non omnes lineæ, nec omnes superficies, neque omnes plani anguli, esto sint ejusdem generis quantitates, Rationem habere dicuntur inter se. Sed solùm illæ lineæ, aut superficies, Rationem inter se habere dicuntur, quarum utralibet, si multiplicetur, possit tantùm augeri, ut tandem alteram superarit. Sicque linea finita nullam dicitur habere Rationem cum lineâ infinitâ: Nam, quantumvis multiplicetur linea finita, nunquam poterit infinitam excedere. Et pari ratione angulus Contingentiæ, quantumvis augeatur, semper minor existit minimo angulo rectilineo; ideòque nullã cum eo Rationem habere potest: ut infra dicemus. At verò è contra omnes numeri Rationẽ habere dicuntur inter se; maximè quia non est numerus, qui multiplicatus, non possit alterum superare. Def. 5. 5.

8 Cum itaque Ratio sit species *Relationis*, duos propterea terminos requirit, quorum prior, qui scilicet refertur, vocatur *Antecedens*; posterior verò, *Consequens*, ad quem scilicet ille refertur. Ut Rationis, quæ est quantitatis A ad quantitatem B, A dicitur *Ante-*

Antecedens; B verò *Conſequens*. Rationis verò, quæ eſt quantitatis B ad quantitatem A; B dicitur *Antecedens*, & A *Conſequens*.

Ratio igitur ab Euclide definita dividitur primò in *rationalem*, & *irrationalem*.

9 *Ratio rationalis* eſt, quam dicuntur habere inter ſe quantitates *commenſurabiles* (ſuprà n. 2.), quæ ſcilicet partem aliquotam habent communem. Sicque inter omnes numeros ſemper eſt Ratio *rationalis*, quia ſaltem unitas illos ſemper metitur.

10 *Ratio irrationalis* eſt, quam dicuntur habere inter ſe Quantitates *incommenſurabiles*. Ut in Quadrato, Ratio lateris ad ejus Diagonum: vel in Circulo, Ratio Diametri ad peripheriam: dicitur Ratio *irrationalis*. Nam, licet latus Quadrati bis ſumptum ſuperet Quadrati Diagonum; & Diameter Circuli quater repetita excedat ejuſdem peripheriam; eæque propter hujuſmodi lineæ Rationem inter ſe dicuntur habere; eſtòque earum quælibet infinitas habeat aliquotas partes, putà *tertiam*, *quartam*, *quintam*, &c. tamen, quia nulla poteſt aſſignari pars aliquota unius, quæ ſit etiam pars aliquota alterius, ſeu quod idem eſt, nulla parva linea cognoſcitur, quæ utramque lineam valeat præcisè metiri (ut ab Euclide demonſtratur *Elem.* X *prop. ultimâ*); Quantitates ideo evadunt incommenſurabiles; Ratioque propterea inter eas dicitur *irrationalis*, cùm poſitivis numeris exprimi non poſſit.

Præterea Ratio dividi ſolet in Rationem *æqualitatis*, & *inæqualitatis*.

11 *Ratio æqualitatis* eſt, quam habere dicuntur duæ quantitates inter ſe æquales. Ut Ratio 10 ad 10 &c. de quâ tamen, cùm ſemper eadem ſit, nullus erit ulterior ſermo: niſi quòd omnis Ratio æqualitatis eſt neceſſariò rationalis, non tamen è contra.

12 *Ratio* verò *inæqualitatis* eſt, quam habere dicuntur duæ Quantitates inter ſe inæquales. Ut Ratio 10 ad 20; 8 ad 6 &c. quæ tamen duplex eſt *majoris* ſcilicet *inæqualitatis*, & *minoris inæqualitatis*.

13 *Ratiò majoris inæqualitatis* eſt, quam habere dicitur major quantitas ad minorem comparata. Unde

de dici etiam solet Ratio *excessûs*. Ut Ratio 12 ad 8, &c: in qua scilicet Antecedens semper est major Quantitas; minor verò, Consequens.

14 Ratio verò *minoris inæqualitatis* est, quam habere dicitur minor quantitas ad majorem comparata: soletque dici propterea Ratio *defectûs*. Ut Ratio 8 ad 12, &c: in qua scilicet Antecedens semper est minor Quantitas; major verò, Consequens.

Omnis autem Ratio *irrationalis* necessariò est *inæqualitatis* Ratio; non tamen è contra: ut patet.

Et tandem Ratio solet adhuc dupliciter sumi; *geometricè* scilicet, & *arithmeticè*.

15 Ratio *geometricè* sumpta dicitur haberi inter duas quantitates inæquales: quando ipsarum altera, vel earumdem Differentia ad alteram comparata, consideratur ut *pars* illius, aut *partes*. Ut Ratio, quæ est inter quantitates 8 & 4, dicitur *geometrica*, si quantitas 4 consideratur ut *pars*, nempe *dimidia* majoris 8. Vel inter quantitates 4 & 6: si scilicet earum Differentia 2 consideratur ut *pars*, nempe *dimidia* quantitatis 4, aut *tertia* quantitatis 6. Vel inter 3 & 5: si nimirum earum Differentia 2 consideratur ut *partes*, idest ut duæ *tertiæ partes* quantitatis 3, vel duæ *quintæ partes* quantitatis 5.

16 In Ratione verò *arithmeticè* sumptâ attenditur absoluta *Differentia*, seu *Excessus*, quo quantitas cum quantitate comparata eam superat, vel ab ea superatur, absque illa cõsideratione, nisi ille excessus sit *pars*, aut *partes* alterutrius; sed solummodò prout *absolutus excessus* est. Ut Ratio *arithmetica*, quæ est inter 8 & 4, consistit in absoluto quatuor unitatum excessu, quo octonarius superat quaternarium nullâ habitâ consideratione, utrùm ille quatuor unitatum excessus sit pars, aut partes utriuslibet numeri; sed solùm attenditur, quòd sit talis merus excessus, seu talis differentia, secundùm quam numeri illi inter se differunt.

Nomine autem absoluto *Rationis* juxta communiorem usum ferè semper sola *Ratio geometrica* significatur, tanquam dignior, ac æquè latior *arithmeticâ*, de qua parva est hic mentio, cùm merè consistat, ut diximus

mus in solâ æquidifferentiâ, ut excessus est.

17 *Rationis igitur rationalis geometricæ* decem sunt genera: Ex quibus quinque priora continent Rationes *majoris inæqualitatis*, quæ nimirum concernunt quantitatem majorem, prout comparatur, & refertur ad minorem. Et quinque reliqua prioribus correspondentia, continent Rationes *minoris inæqualitatis*, quæ scilicet concernunt quantitatem minorem, pro ut comparatur, & refertur ad majorem.

18 Genera geometricæ Rationis *majoris inæqualitatis* sunt, Ratio *Multiplex*, *Superparticularis*, *Superpartiens*, *Multiplex-Superparticularis*, & *Multiplex-Superpartiens*: in quibus scilicet *Antecedens* semper est *major* quantitas; *Consequens* verò, *minor*.

19 Ratio *Multiplex* est habitudo majoris quantitatis ad minorem, quando *major minorem multoties* sumptam *præcisè* continet, absque ullo excessu, aut defectu. Cujus species sunt, Ratio *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, *Quintupla* &c. Ut Ratio 4 ad 2 dicitur *dupla*, quia Antecedens 4 bis præcisè continet Consequens 2. Sic pariter Ratio 9 ad 3 dicitur tripla, quia Antecedens 9 ter præcisè continet Consequens 3, absque excessu, aut defectu.

20 Ratio *Superparticularis* est habitudo majoris quantitatis ad minorem, quando *major* continet *semel minorem*, & *simul* ejus *partem aliquotam*, putà dimidiam, tertiam &c. Cujus species sunt, Ratio *Sesquialtera*, *Sesquitertia*, *Sesquiquarta*, *Sesquiquinta* &c. Ut Ratio 3 ad 2 dicitur *Sesquialtera*, quia Antecedens 3 semel continet Consequens 2, & simul ejus *dimidiam* partem 1: sicque Ratio 6 ad 4; 12 ad 8 &c, dicitur pariter *Sesquialtera*. Ita similiter Ratio 4 ad 3 dicitur *Sesquitertia*, quia Antecedens 4 semel continet Consequens 3, & simul ejus *tertiam* partem 1: sicque Ratio 12 ad 9; 8 ad 6 &c, dicitur pariter *Sesquitertia*. Ita similiter Ratio 5 ad 4 dicitur *Sesquiquarta*, quia Antecedens 5 semel continet Consequens 4, & simul ejus *quartam* partem 1; Unde etiam Ratio 10 ad 8; 15 ad 12 &c, dicitur pariter *Sesquiquarta*. Et sic deinceps pro cœteris *Super-*

par-

particularis speciebus, putà *sesquisextâ*, *sesquiseptimâ*, &c.

21 Ratio *Superpartiens* est habitudo majoris quantitatis ad minorem, quando *major semel* continet *minorem*, & *simul* ejus *partem aliquantam*, seu plures partes aliquotas, non facientes unam aliquotam (Nõnunquam enim plures partes aliquotæ unam efficiunt partem aliquotam: Ut *duæ sextæ partes unam* efficiunt *partem tertiam*, & *quatuor octavæ partes* idem sunt, ac *una pars dimidia*: tuncque Ratio non est dicenda Superpartiens, sed Superparticularis, ut mox dicemus). Hujus generis species sunt Ratio *Superbipartiens*, *Supertripartiens*, *Superquadripartiens*, &c. *tertias*, *quartas*, *quintas*, &c. Ut Ratio 5 ad 3 dicitur *superbipartienstertias*, quia Antecedens 5 semel continet Consequens 3, & insuper *duas* ejus *tertias partes*, quæ non faciunt unam aliquotam. Ratio 7 ad 4 dicitur *supertripartiensquartas*, quia Antecedens 7 semel continet Consequens 4, & simul *tres* ejus *quartas partes*, non efficientes unam aliquotam. Et ita deinceps reliquas *Superpartientis* species nominabis, ponendo partium numeratorem inter ly *super*, & ly *partiens*, denominatorem verò, immediatè post ly *partiens*; dicendo: *Superbipartiensseptimas*, *supertripartiensquintas*, &c. Hinc igitur animadvertas oportet, Rationem 8 ad 6 non esse superpartientem, idest superbipartientem sextas; benè verò superparticularem, nempè sesquitertiam; maximè quia duæ sextæ partes, unam efficiunt partem tertiam, ut dictum est. Et sic de aliis similibus.

22 Ratio *Multiplex-superparticularis* consurgit ex compositione Rationis *Multiplicis* cum *Superparticulari*. Est enim habitudo majoris quantitatis ad minorem, quando *major multoties* continet *minorem*, & *simul* ejus *partem aliquotam*. Cujus species sunt Ratio *Dupla-sesquialtera*, *Dupla-sesquitertia*, &c. *Tripla-sesquialtera*, *Tripla-sesquitertia*, &c. & ita deinceps commiscendo simul species Rationis *Multiplicis* cum speciebus *Superparticularis*. Ut Ratio 5 ad 2 dicitur *dupla-sesquialtera*, quia Antecedens 5 bis

 con-

continet Consequens 2, & simul etiam ejus partem *dimidiam* 1. Ita similiter Ratio 22 ad 7 dicitur *tripla-sesquiseptima*, quia Antecedens 22 ter continet Consequens 7, & insuper ejus *septimam partem* 1.

23 Ratio *Multiplex-superpartiens* consurgit ex compositione Rationis *Multiplicis*, cum *Superpartiente*. Est enim habitudo majoris quantitatis ad minorem, quando *major multoties* continet *minorem*, & *simul* ejus *partem aliquantam*, seu plures partes aliquotas, non facientes unam aliquotam, ut dictum est suprà n. 21. Cujus species sunt Ratio *Dupla-superbipartiens-tertias*, *Dupla-supertripartiensquartas*, &c: *Tripla-superbipartienstertias*, *Tripla-supertripartiens-quartas*, &c: & sic deinceps commiscendo simul utriusque Rationis species, *Multiplicis* scilicet, & *Superpartientis*. Ut Ratio 8 ad 3 dicitur *Dupla-superbipartienstertias*, quia Antecedens 8 bis continet Consequens 3, & insuper *duas* ejus *tertias partes*, non efficientes unam aliquotam. Similiter Ratio 25 ad 7 dicitur *tripla-superquadripartiensseptimas*, quia Antecedens 25 ter continet Consequens 7, & insuper *quatuor* ejus *septimas partes*, non efficientes unam aliquotam. Ratio autem 15 ad 6 licèt videatur esse *Multiplex-superpartiens*, maximè quia Antecedens 15 bis continet Consequens 6, & insuper *tres* ejus *sextas partes*; tamen, quia *tres* illæ *sextæ partes* unam efficiunt partem aliquotam nempe *dimidiam*, Ratio propriè evadit *Multiplex-superparticularis*, videlicet *dupla-sesquialtera*.

24 Genera verò *geometricæ* Rationis *minoris inæqualitatis* sunt correspondenter, Ratio *Submultiplex*, *Subsuperparticularis*, *Subsuperpartiens*, *Submultiplex-subsuperparticularis*, & *Submultiplex-subsuperpartiens*: in quibus scilicet *Antecedens* semper est *minor* quantitas, *Consequens* verò, *major*.

25 Ratio *Submultiplex* est habitudo minoris quantitatis ad majorem, quando *minor multoties* sumpta seu repetita *majorem præcisè* adæquat. Cujus species sunt Ratio *Subdupla*, *Subtripla*, *Subquadrupla*, &c. Ut Ratio 2 ad 4 dicitur *Subdupla*, quia Antecedens

2 *bis* repetitum præcisè adæquat Consequens 4. Sic pariter Ratio 5 ad 15 dicitur *Subtripla*, quia Antecedens 5 *ter* sumptum præcisè adæquat Consequens 15, absque excessu, aut defectu.

26. Ratio *Subsuperparticularis* est habitudo minoris quantitatis ad majorem, quando *minor semel* sumpta, *simul* cum unâ suâ *parte aliquotâ*, *majorem* præcisè adæquat; Cujus species sunt Ratio *Subsesquialtera*, *Subsesquitertia*, *Subsesquiquarta*, &c. Ut Ratio 2 ad 3 dicitur *Subsesquialtera*, quia Antecedens 2 semel sumptum, simul cum sua *dimidia parte* 1, præcisè adæquat Consequens 3. Sicque Ratio 6 ad 8 dicitur *Subsesquitertia*. Ratio 12 ad 15 dicitur *Subsesquiquarta*, &c.

27. Ratio *Subsuperpartiens* est habitudo minoris quantitatis ad majorem, quando *minor semel* sumpta *simul* cum sua *parte aliquanta*, seu cum pluribus aliquotis partibus, non facientibus unam aliquotam, *majorem* præcisè adæquat. Cujus species sunt *Subsuperbipartiens tertias*, *quintas*, *septimas*, &c. *Subsupertripartiens quartas*, *quintas*, *septimas*, &c. Ut Ratio 3 ad 5 dicitur *Subsuperbipartiens quintas*, quia Antecedens 3 semel sumptum, simul cum *duabus* ejus *tertiis* partibus, præcisè adæquat Consequens 5. Sicque Ratio 4 ad 7 dicitur *Subsupertripartiens quartas*. Ratio 14 ad 22 dicitur *Subsuperquadripartiens septimas*, &c.

28. Ratio *Submultiplex-subsuperparticularis* est habitudo minoris quantitatis ad majorem, quando *minor multoties* sumpta, *simul* cum suâ *parte aliquotâ*, *majorem* præcisè adæquat. Cujus species sunt *Subdupla-subsesquialtera*, *Subdupla-subsesquitertia*, &c. *Subtripla-subsesquialtera*, *Subtripla-subsesquitertia*, &c. Ut Ratio 4 ad 10 dicitur *Subdupla-subsesquialtera*, quia Antecedens 4, *bis* sumptum, unà cum suâ parte *dimidiâ* 2, præcisè adæquat Consequens 10. Et Ratio 9 ad 30 dicitur *Subtripla-subsesquitertia*. Ratio 8 ad 18 dicitur *Subdupla-subsesquiquarta*, &c.

29. Ratio *Submultiplex-subsuperpartiens* est habitudo minoris quantitatis ad majorem, quando *minor*

mul-

multoties sumpta *simul* cum sua *parte aliquantâ*, seu cum pluribus aliquotis partibus, non facientibus unam aliquotam, majorem præcisè adæquat. Cujus species sunt Ratio *Subdupla-subsuperbipartienstertias*, *Subdupla-subsupertripartiensquartas*, &c. *Subtripla-subsuperbipartienstertias*, *Subtripla-subsupertripartiensseptimas*, &c. Ut Ratio 3 ad 8 dicitur *Subdupla-subsuperbipartienstertias*, quia Antecedens 3 *bis* sumptum, unà cum *duabus* ejus *tertiis* partibus, præcisè adæquat Consequens 8. Sicque Ratio 4 ad 15 dicitur *Subtripla-subsupertripartiensquartas*. Ratio 5 ad 17 dicitur *Subtripla-subsuperbipartiensquintas*, &c. Ubi vides quòd quinque genera Rationum *minoris inæqualitatis* nominari debent, particulâ (*sub*) singulis præpositâ. Quinque verò priora *majoris inæqualitatis*, absque (*sub*) nominantur.

Def. 6. 5. 30. *In eâdem Ratione quantitates dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cum prima, & tertia æquè multiplicia à secunda, & quarta æquè multiplicibus, qualiscumque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.* Docet hic Euclides à signo quomodo ver: gra: quatuor quantitates A, B, C, D, *in eâdem dicantur esse Ratione* geometricâ. Ut enim eadem ostendatur esse Ratio A ad B; quæ sit C ad D, utraque scilicet *Sesquialtera*: sumenda sunt; inquit, *æquè multiplicia Antecedentium, prima* scilicet quantitatis A, *& tertia* C; sintque E, & G, quæcumque sint illa, sive simul *dupla* (ut apparet in allato exemplo), sive simul tripla, sive simul quadrupla, &c. Item sumantur *æquè multiplicia Consequentium*, *secunda* scilicet quantitatis B, *& quarta* D, sintque F, & H, quæcumque sint illa, sive simul dupla, sive simul tripla, sive simul *quadrupla* (ut videtur in exemplo), &c. Et factâ eorum comparatione: si *Antecedentium multiplicia* E, G *unâ sint æqualia Consequentium multiplicibus* F & H, *vel unà excedant*

A	B	C	D
9.	6.	3.	2.
18.	24.	6.	8.
E	F	G	H

dant ipsa, *vel unà deficiant*: hoc est: si quoties multiplex E primæ quantitatis majus sit multiplice F secundæ quantitatis, toties multiplex G majus erit multiplice H quartæ. Vel si quoties multiplex E primæ quantitatis, æquale sit multiplici F, etiam multiplex G æquale erit multiplici H. Vel si quoties multiplex E minus sit multiplice F, etiam multiplex G minus erit multiplice H; ita ut hoc non semel contingat; sed in æquali quacumque multiplicatione Antecedentium A & C, & in æquali multiplicatione Consequentium C & D, id invariabiliter semper eveniat; tunc constans signum erit, *eamdem esse Rationem* A *ad* B, *quæ est* C *ad* D.

31 Poteris etiam faciliùs *identitatem* sive *similitudinem* Rationum agnoscere, ex suprà jam traditis ipsarum generibus, & speciebus, comparando scilicet Antecedentes terminos suis Consequentibus per attentationem continentiæ; sicque brevi negotio perscrutari, an illæ sint simul *duplæ*, vel simul *sesquialteræ*, vel simul *subtriplæ*, &c. Ut in eodem exemplo, cùm Ratio A 9 ad B 6 sit sesquialtera, utpotè quia 9 semel continet totum 6, & insuper ejus dimidium 3: & similiter Ratio C 3 ad D 2 sit quoque sesquialtera, quia 3 semel continet totum 2, & insuper ejus dimidium 1: ideò rectè inferes, *eamdem esse Rationem* Antecedentis A ad suum Consequens B, quàm Antecedentis C ad suum Consequens D. Quod est, *Quantitates in eâdem esse Ratione.*

32 *Cùm verò æquè multiplicium multiplex primæ quantitatis excesserit multiplicem secundæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam majorem Rationem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.* Hoc est datis quatuor quantitatibus A, B, C, D, quando in aliqua pari multiplicatione Antecedentium A & C, & pari multiplicatione Consequentium B & D, multiplex E primæ quantitatis A excesserit multiplicem F secundæ quantitatis B; at verò multiplex G tertiæ quantitatis C non excesserit multiplicem H quartæ quantitatis D (ut videtur in allato exemplo): tunc Def. 8. 5.
evi-

evidens ſignum erit, propoſitas quantitates non eſſe in eadem *Ratione*. Et ex hoc infert Euclides, majorem eſſe Rationem primæ quantitatis A ad B ſecundam, quàm ſit tertiæ C ad quartam D; maximè quia multiplex primæ excesserit multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ, ſed eo minor ſit, aut æqualis.

A B C D
9 3 3 2
27 25 9 16
E F G H

Quod quidem neceſſe non eſt, ut ſic ſemper eveniat in quacumque æquali multiplicatione Antecedentium, & Conſequentium; ſed ſatis eſt, ut major dicatur Ratio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam, quòd ſecundùm aliquam multiplicationem multiplex primæ exceſſerit multiplicem ſecundæ, ubi multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ. Sicut & contrà, ut minor dicatur eſſe Ratio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam, ſufficit, quòd ſecundùm aliquam multiplicationem multiplex primæ non exceſſerit multiplicem ſecundæ, ubi multiplex tertiæ exceſſerit utique multiplicem quartæ.

Coroll. Ut igitur quatuor quantitates dicantur in eadem eſſe Ratione, oportet, quòd in omni æquali multiplicatione Antecedentium, & æquali multiplicatione Conſequentium, æquè multiplicia Antecedentium ſemper vel unà æqualia ſint, vel unà deficiant, vel unà excedant æquè multiplicia Conſequentium. At verò, ut major dicatur Ratio primæ quantitatis ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam, ſatis eſt, quòd ſecundùm aliquam multiplicationem terminorum multiplex primæ exceſſerit multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ. Sicut & contrà, ut minor dicatur Ratio primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam, ſatis eſt, quòd ſecundùm aliquam multiplicationem, multiplex primæ non exceſſerit multiplicem ſecundæ, ubi multiplex tertiæ exceſſerit utique multiplicem quartæ.

Quod, licet verum ſit, tamen non ita clarè, ut par

eſt,

est, naturam *similitudinis*, aut *dissimilitudinis* Rationum ostendit, atque ad dignoscendam majorem Rationem à minore, nimis operosam tot illis multiplicibus nos docet attentationem.

23 Ut igitur *identitatis* Rationum vel earumdem *dissimilitudinis*, atque *majoritatis* generale non minus, ac evidens, facileque obtineas argumentum, oportet primò, quid sit similis pars aliquota, deinde quomodo cognoscenda erit Rationum similitudo sive identitas, definire. Quod tamen à laudato P. *Dechales* illud cum *Tacqueto* docente placeat audire.

,, Similes partes aliquotæ duorum totorum sunt,
,, quarum una toties in suo toto continetur, quoties
,, alia in suo. Ut binarius numeri senarii est similis
,, pars, ac ternarius novenarii, quia toties binarius
,, in senario, quoties ternarius in novenario conti-
,, netur.

,, Positis igitur quatuor quantitatibus A, B, C, D,
,, prima ad secundam eamdem Rationem habebit, ac
,, tertia ad quartam; si prima toties contineat secun-
,, dæ partes aliquotas quascumque, quoties tertia
,, quartæ similes partes aliquotas continet. Ut si quantitas A toties continet quantitatis B partes *quartas* (ut patet in exemplo), decimas, centesimas, millesimas, sive alias quascumque aliquotas, quoties C continet quantitatis D partes *quartas* (ut patet), decimas, centesimas, millesimas, sive alias quascumque partes aliquotas similes: prima enim quantitas A 36 sexties continet 6, *quartam* scilicet partem secundæ B 24; sicut etiam tertia C 12 sex-
,, ties pari modò continet 2 quartam partem quartæ
,, D 8: ita ut nulla sit pars quantitatis B, quæ plu-
,, ries continetur in quantitate A, quàm similis
,, pars aliquota ipsius D continetur in C, licèt
,, in irrationalibus restet semper aliqua quantitas:
,, tunc igitur eadem esse dicitur Ratio A ad B,
,, quæ C ad D.

A	B	C	D
36.	24.	12.	8.

Quod

34 Quod si non ita semper eveniat, constans signum erit, quantitates illas dissimiles habere Rationes. ,, Majorem autem Rationem habebit prima ad ,, secundam, quàm tertia ad quartam, quoties prima ,, aliquam partem aliquotam secundæ pluries conti- ,, nebit, quam tertia contineat similem partem ali- ,, quotam quartæ. Ut prima quantitas E 9 ad secundam F 6 majorem Rationem habet, quàm tertia G 5 ad quartam H 4: quia in priore Ratione E ad F Antecedens 9 ter continet 3 dimidiam partem sui Consequentis 6 (ter enim 3 adæquat 9) at in posteriore Ratione G ad H Antecedens 5 bis tantùm continet 2 dimidiam partem sui Consequentis 4; ter enim 2 facit 6, quod non continetur in 5. Ergo major dicitur esse Ratio E ad F, quàm G ad H.

E	F	G	H
9	6	5	4

Def. 7. 5. 35 *Eamdem autem habentes Rationem quantitates, proportionales vocentur.*

Def. 4. 5. 36 Nam *Proportio*, seu Analogia, *est Rationum similitudo*. Hoc est, si quatuor quantitatum A, B, C, D, prout termini sunt duarum Rationum ver: grat: geometricarum, Ratio primæ A ad secundam B fuerit ejusdem speciei cum Ratione tertiæ C ad quartam D, utraque scilicet *sesquitertia* &c. *Identitas* illa seu *similitudo* Rationum nominatur *Proportio*, seu *Analogia*; quatuor verò quantitates illæ dicuntur *proportionales*.

A	B	C	D
12	9	8	6

37 Hic locum habere videntur Definitiones 20, & 21 *Elem. 7. Euclidis*, qui ut *similes numeros planos*, aut *solidos* definiat *proportionalium* numerorum descriptionem præmittit, dicens: *Numeri proportionales sunt, cùm primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes*. Hoc est, quando Ratio primi numeri ad secundum

Def. 20. 7.

dum eadem, seu similis erit, cum Ratione tertii ad quartum modo suprà exposito, tunc quatuor illi numeri sunt proportionales. Ut, quia numerus 8 *duplus* est 4, sicut 12 *duplus* est 6; erunt ideo numeri 8. 4. 12. 6 *proportionales*. Et similiter, quia numerus 2 est tertia *pars* numeri 6, sicut 3 est tertia quoque *pars* numeri 9; erunt numeri 2. 6. 3. 9 *proportionales*. Et tandem, quia 4 sunt duæ tertiæ *partes* numeri 6, sicut 2 sunt duæ tertiæ *partes* numeri 3, erunt igitur numeri 4. 6. 2. 3 *proportionales*.

38 *Similes Plani, & Solidi numeri sunt, qui proportionalia habent latera*. Ut *plani* numeri 48 & 12 dicuntur *similes*, quia primi *latera* 6 & 8, & secundi *latera* 3 & 4 proportionalia sunt: eadem enim est Ratio 6 ad 8 (quæ *latera* sunt *plani* numeri 48) ac est Ratio 3 ad 4 (quæ pariter *latera* sunt *plani* numeri 12), nempe *subsesquitertia*. Iidem *solidi* numeri 48 & 6 dicuntur *similes*, quia primi *latera* 2. 4. 6. & secundi *latera* 1. 2. 3. sunt proportionalia: eadem enim est Ratio 2 ad 4 in primo Solido, ac 1 ad 2 in secundo, nempe subdupla: & 4 ad 6 in primo, ac 2 ad 3 in secundo, nempe *subsesquialtera*. Quod est numerum habere *latera proportionalia*. Ubi tamen vides, necesse non esse, ad hoc ut numeri dicantur *similes*, quòd omnia eorum *latera* sint proportionalia; sed solùm sufficit, quòd aliqua dumtaxat latera, ex quibus numeri illi ritè producuntur, proportionalia sint modo jã exposito. Def. 21. 7.

Proportio igitur ex dictis vel est *geometrica*, vel *arithmetica*, præter *harmonicam*, quam, cùm præsentis non videatur instituti, consultò reticemus.

39 Proportio *geometrica* est identitas seu similitudo Rationum geometricarum. Ut in duabus ejusdem speciei Rationibus geometricis, videlicet simul *triplis*, vel simul *sesquialteris*, vel simul *subduplis* &c. *Identitas* illa seu *similitudo Rationum* dicitur *proportio geometrica*; termini verò dicuntur *geometricè proportionales*.

40 Proportio verò *arithmetica* est identitas seu similitudo Rationum arithmeticarum. Ut in duabus

arithmeticis Rationibus, in quibus est æqualis excessus. Identitas illa seu similitudo Rationum dicitur proportio arithmetica; termini verò dicuntur arithmeticè proportionales.

Coroll. Datis quatuor quantitatibus sive geometricè, sive arithmeticè proportionalibus: binæ Antecedentes semper erunt vel simul majores, vel simul minores, vel simul æquales binis Consequentibus. Ut in proportionalibus A, B, C, D, sicuti Antecedens A primæ Rationis major est Consequente B; ita Antecedens C secundæ Rationis debet major esse Cõsequẽte D.

A	B	C	D
8.	4.	6.	3.

Præterea quantitates proportionales vel sunt *continuè* proportionales, vel *discontinuè* proportionales.

41 Quantitates *continuè* proportionales sunt illæ, quarum, quæ mediæ sunt, singulæ bis sumuntur, semel ut Antecedentes, & semel ut Consequentes. Velut in geometricè proportionalibus A, B, C, D, est subdupla Ratio A ad B, sicut B ad C, & C ad D. Ubi vides, quod mediæ quantitates B, & C, singulæ bis sumuntur; B nimirum semel ut Consequens Rationis A ad B, & semel ut Antecedens Rationis B ad C; & similiter C semel ut Consequens Rationis B ad C, & semel ut Antecedens Rationis C ad D. Ita ut sicut se habet A ad B, ita B ad C, & ita C ad D, in continuâ scilicet Ratione subduplâ.

A	B	C	D
3.	6.	12.	24

42 Quantitates verò *discontinuè* proportionales dicuntur: quando Consequens primæ Rationis non sumitur, ut Antecedens similis Rationis sequentis; sed aliud est illius Antecedens. Ut in geometricè proportionalibus A, B, C, D: ubi B Consequens subduplæ Rationis A ad B nõ sumitur, ut Antecedens cõsimilis Rationis; sed aliud est hujus Antecedens, nempe C.

A	B	C	D
3	6	4	8

Un-

Unde licèt eadem sit Ratio A ad B, quæ est C ad D; tamen non est eadem Ratio A ad B, quæ est B ad C: hæc enim est sesquialtera; illa verò subdupla.

Et similiter intelligendum est in arithmeticè proportionalibus.

43 *Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.* Hoc est: cùm proportio ex dictis sit Rationum similitudo, debent in proportione duæ saltem inveniri Rationes. Quælibet autem Ratio, cùm sit Relatio, duos debet terminos habere, ut dictum est; ideoque in proportione requiruntur quatuor termini, duo scilicet Antecedentes, & duo Consequentes. At quia in proportione continuâ Consequens anterioris Rationis fit Antecedens posterioris, ex supradictis, Jam igitur in tribus quantitatibus continuè proportionalibus satis haberi videntur quatuor termini ad proportionem requisiti; quæ tamen dicitur in paucioribus terminis, quàm tribus consistere non posse, quia perspicuum est, in duobus terminis nonnisi unicam tantùm Rationem reperiri, non verò proportionem, quæ duas saltem importat Rationes. Unde liquidò constat, proportionem continuam non posse consistere in paucioribus terminis, quàm in tribus: sicut & discontinuam non minùs, quàm in quatuor. *Def. 9. 5.*

44 Possunt tamen tres quicumque termini proportionem satis fundare discontinuam: quoties scilicet datis tribus, quartus inquiritur, ad quem tertius se habeat, sicut primus se habet ad secundum. Siquidem datis tribus, Antecedente scilicet, & Consequente unius Rationis; nec non & Antecedente similis exigendæ Rationis; statim adeò necessarius innotescet quartus quæsitus, quòd alius omnino præter eum, qui similis Rationis Consequens esse debet, excogitari nequit. Exempl. gra. datâ Ratione Antecedentis 9 ad Consequens 6, quæ est sesquialtera: & dato quoque Antecedente 3 pro simili constituendâ Ratione, sufficienter atque evidenter datur intelligi quisnam erit hujus Consequens, nempe 2, ejus scilicet subsesquialterum, quod nequit aliud esse præter ipsum 2. Ternarius quippe non

dicit Rationem sesquialteram, nisi ad solum binarium. Sicque licet in tribus datis terminis complete non valeat discontinua consistere proportio; possunt tamen tres termini proportionem satis fundare discontinuam. Quod videtur totum *Aureæ Regulæ*, vulgò *Trium* dictæ fundamentum.

45 *Homologæ seu similes Ratione quantitates dicuntur: Antecedentes quidem Antecedentibus; Consequentes verò Consequentibus.* Ut in quatuor quantitatibus proportionalibus A, B, C, D, (proportionales enim supponuntur hic ab Euclide quantitates), binæ Antecedentes A, & C dicuntur *homologæ*; sicut & binæ consequentes B & D sunt etiam *homologæ*, ideft ejusdem Rationis: eadem enim est Ratio Antecedentis A ad Antecedentem C, ac Consequentis B ad Consequentem D. Def. 11. 5.

A	B	C	D
2.	4.	8.	16.

46 *Ratio ex Rationibus componi seu constare dicitur, quando Rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint Rationem.* Quantitates Rationum hic vocat Euclides non illas, quæ datarum Rationum sunt termini, benè verò eas quantitates, à quibus ipsæ Rationes denominationem sumunt. Ut quantitas binarii, à quo denominatur Ratio *dupla*: quantitas 3, à quo *tripla*: quantitas 4, à quo *quadrupla*: unum & dimidium, à quibus denominatur Ratio *sesquialtera*: unum & duo tertia, a quibus denominatur Ratio *superbipartiens-tertias &c.* Def. 5. 6.

Præterea ad clariorem hujus definitionis intelligentiam prænotandum, quòd Rationes, ex quibus aliqua Ratio *componi* seu *constare* dicitur, in continuâ intelliguntur positione constitui: videlicet, quòd in datâ earum serie, termini intermedii singuli bis sumantur, semel ut Antecedentes, & semel ut Consequentes: quemadmodum in continuâ proportione dictum est *suprà n.* 41. Ut ex iis jam continuè positis hoc rectè affirmari queat: quòd nimirum in continuâ positione terminorum, ver: gra: A, B, C, D, Rationes in-

intermediæ, quæcumque sint illæ, semper componere dicuntur extremorum Rationem. In hoc enim exemplificatur veritas definitionis: quòd scilicet Ratio extremorum A, D sit ea, quæ *componi* seu *constare* dicitur ex Rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D.

Sensus igitur definitionis est, quòd ea Ratio ex Rationibus *componi* seu *constare* dicitur, cujus quantitas, seu denominator ex *cõponentiũ* Rationũ denominatoribus invicem multiplicatis aut divisis consurgit. Ut in continuâ positione terminorum A, B, C, Ratio *sextupla* extremorum, A scilicet ad C, dicitur *componi* seu *constare* ex duabus intermediis Rationibus A ad B *triplâ*, & B ad D *duplâ*: quia ejus denominator 6 producitur ex illarum denominatoribus 3 & 2 invicem multiplicatis: bis enim 3 faciunt sex. Ubi vides, quod in continuâ positione Rationum, ex quibus aliqua dicitur Ratio *constare*, possunt quidem promiscuè ex omni genere, & specie constitui Rationes: putà quòd una sit *multiplex*, altera *superparticularis* &c: vel una *dupla*, altera *tripla*, aut *sesquialtera* &c. In quibus utiq; multiplicatione sẽpér utẽris, si Rationes aut simul *majoris*, aut simul *minoris* sint *inæqualitatis* suprà n. 13 & 14.

A	B	C
12.	4.	2

Verumtamen ubi una Ratio fuerit *majoris*, altera verò *minoris inæqualitatis* (Rationes *minoris inæqualitatis* nominando, semper particulam *sub* præponimus; ut *subtripla*, *subsesquialtera*, *subsuperpartiens* &c.) tunc fieri non debet præfata denominatorum multiplicatio; sed major denominator per minorem denominatorem dividatur; Quotiens namque denominabit resultantem Rationem, quam ex illis *constare*, definit Euclides. Ut in continuâ positione terminorum A, B, C, Ratio sesquialtera extremorum, A scilicet ad C, *componi* dicitur, seu *constare* ex duabus Rationibus, A ad B *triplâ*, *majoris* scilicet *inæqualitatis*, & B ad C *subduplâ minoris inæqualitatis*; quia major denominator 3, si dividatur per minorem 2, dabit pro Quotiente unum & dimidium: quod est denominator Rationis sesquialteræ extremorum, A sci-

A	B	C
6.	2.	4.

scilicet ad C. Nam A semel continet totum C, ejusque dimidium.

Fit autem hujusmodi multiplicatio, aut divisio semper inter duas tantummodo Rationum quantitates, seu denominatores, qui sic invicem multiplicati, aut divisi aliquam efficiunt Rationis quantitatem, denominatorem scilicet quæsitæ Rationis ex utrâque constantis. Etenim verò ubi plures fuerint Rationes, ex quibus aliqua *componi* seu *constare* dicitur Ratio: tunc oportet ex duabus primis unam efficere Rationem modo supradicto: deinde ex hac & succedente tertiâ invicem multiplicatis, aut divisis, alia conficiatur Ratio, ex tribus intermediis utique constans: & pari modo ex hac, & alterâ succedente quartâ, si erit, nova iterum eliciatur Ratio, quæ profectò ex quatuor intermediis *componi* seu *constare* dicitur Rationibus. Et ita deinceps procedat semper hujusmodi *compositio*, multiplicando scilicet, aut dividendo inter auctam ex intermediis Rationem, & immediatè succedentem, quoadusque datarum continua positio Rationum extiterit.

Ut in continuâ positione terminorum A, B, C, D, Ratio dupla extremorum, A scilicet ad E, dicitur *constare* seu *componi* ex intermediis Rationibus A ad B triplâ, B ad C quadruplâ, C ad D subtriplâ, & D ad E subduplâ. Nam ex primis duabus Rationibus, A scilicet ad B triplâ, & B ad C quadruplâ, quia simul majoris sunt inæqualitatis Rationes, multiplicando invicem ipsarum denominatores 3, & 4, habebis Rationem A ad C duodecuplam. Hæc autem cum sequente Ratione C ad D subtriplâ componet utique Rationem A ad D, quam tamen habebis, non multiplicando invicem earum denominatores, sicut antea fecimus: altera quippe illarum est Ratio *majoris*, altera verò *minoris inæqualitatis*: benè verò dividendo, ut suprà diximus, majorem denominatorem 12 Rationis duodecuplæ A ad C per minorem 3 Rationis subtriplæ C ad D: Quotiens enim 4 denominabit Rationem A ad D quadruplam. Ex qua tandem & succedente Ratione D ad E subduplâ, procreabitur

A	B	C	D	E
24.	8.	2.	6.	12.

tur

tur dupla Ratio A ad E, si nimirum pari modo dividas denominatorem 4 Rationis quadruplæ A ad D per minorem 2 Rationis subduplæ D ad E (sunt enim *disparis* quoque *inæqualitatis* Rationes). Quotiens namque 2 denominabit Rationem extremorum A ad E duplam: quæ hoc modo dicitur *componi* seu *constare* ex quatuor illis Rationibus intermediis A scilicet ad B, & B ad C, & C ad D, & D ad E; ut hic docet Euclides.

47 *Cum autem tres quantitates proportionales fuerint: Prima ad tertiam duplicatam Rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam. Quando verò quatuor quantitates proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam Rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.* Loquitur hic Euclides de quantitatibus *geometricè*, & *continuè* proportionalibus. Et primò datis tribus proportionalibus A, B, C, inquit primam quantitatem A ad tertiam C *duplicatam* Rationem habere illius, quam prima A habet ad secundam B. Quod sic est intelligendum; videlicet, quòd, supposita Rationum A ad B, & B ad C identitate seu similitudine, quam importat data proportio, Ratio novecupla primæ quantitatis A ad tertiam C *componi* seu *constare* dicitur ex duabus intermediis Rationibus, A ad B, & B ad C, modo jam exposito in superiore *n.* 46. quæ cùm sint ex necessitate æquales propter naturam proportionis, idest ambæ *triplæ*, eundem habent denominatorem 3, qui ductus in se ipsum producit utique 9, denominatorem scilicet Rationis novecuplæ A ad C. Unde sensus est, quòd novecupla Ratio primæ quantitatis A ad tertiam C *duplicata* dicitur esse triplæ Rationis, quam prima A habet ad secundam B, non quia denominator 9 majoris Rationis multiplicandus sit per duo, ut duplus fiat denominatoris 3 Rationis minoris (bis enim 3 faciunt 6 non verò 9); sed *duplicata* dicitur solùm ex hoc, quòd in novecuplâ Ratione primæ quantitatis A ad tertiam C, duæ interveniunt Rationes, æquales utique Rationi A ad B, nimirum ipsa Ratio A ad B, & Ratio Def. 10. 5.

A	B	C
36.	12.	4

B ad

B ad C ambæ triplæ illam noveçuplam *componentes*, quarum denominatores 3 & 3 ad invicem ducti producunt ipsum 9 denominatorem *duplicatæ* Rationis A ad C, quam hic Euclides *duplicatam* nominat ejus, quæ est primæ quantitatis A ad secundam B, non quia hujus Rationis dupla sit illa; sed quoniam ex hac bis sumptâ illa *componi* seu *constare* dicitur, modo suprà tradito *n*.46.

Quando verò quatuor fuerint quantitates continuè & geometricè proportionales A, B, C, D, tunc prima quantitas A ad quartam D (ait ipse) *triplicatam* Rationem habere dicitur ejus, quam habet prima quantitas A ad secundam B. Cujus similiter sensus est, quòd nimirum octupla Ratio A ad D *componi* dicitur ex tribus intermediis Rationibus A ad B, B ad C, & C ad D æqualiter duplis. Gignitur

A	B	C	D
32.	16.	8.	4

namque ejus denominator 8 non ex multiplicatione denominatoris 2 duplæ Rationis A ad B per 3 (ter enim 2 faciunt 6, non 8); sed ex ritè intellectâ trium intermediarum Rationum *compositione*, juxta ea, quæ dicta sunt ibidem n. 46; quatenus scilicet in octuplâ Ratione A ad D tres inveniuntur Rationes æquales Rationi A ad B, nimirum ipsa Ratio A ad B, Ratio A ad C, & Ratio C ad D, omnes duplæ, ipsam octuplam componentes, ut dictum est. Sicque cùm quinque fuerint proportionales quantitates, Ratio primæ ad quintam *quadruplicatam* esse dicitur ejus, quam habet prima ad secundam, hæc namque *quater* in illa reperitur. Et si sex fuerint proportionales, *quintuplicata* dicetur extremorum Ratio si septem, *sextuplicata*. Et ita consequenter uno ampliùs augere dicitur Ratio, quoadusque proportio extiterit: semper tamen uno minus, quàm fuerit terminorum numerus.

Sequentes definitiones sunt modi argumentandi, seu illationes in proportionibus.

48 *Alterna* seu permutata *Ratio, est sumptio Antecedentis comparati ad Antecedens, & Consequentis ad Consequens*. Ut si in quatuor quantitati-

bus

bus proportionalibus, ex eo quod,

Sit A 9 Antec.	alternando, seu	Erit A 9 Antec.
Ad B 6 Conseq.	permutando	Ad C 12 Antec.
Sicut C 12 Antec.	inferamus;	Sicut B 6 Conseq.
Ad D 8 Conseq.	ergo	Ad D 8 Conseq.

49 *Inversa*, seu *Conversa Ratio est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedens tamquam ad consequens*. Hoc est, convertere Rationem majoris inæqualitatis in Rationem minoris inæqualitatis sub iisdem terminis: vel è contra. Ut si in quatuor proportionalibus, ex eo quod Def. 13. 5.

Sit A 9 Antec.	invertendo, seu	Erit B 6 Conseq.
Ad B 6 Conseq.	convertendo	Ad A 9 Antec.
Ut C 12 Antec.	inferamus;	Sicut D 8 Conseq.
Ad D 8 Conseq.	ergo	Ad C 12 Antec.

Corollarium. In Alternâ, atque Inversâ Ratione nulla fit terminorum variatio, sed tum antecedentia, tum consequentia manent substantialiter eadem.

50 *Composita Ratio*, seu *Compositio Rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsum consequens*. Hìc animadvertas oportet, Euclidem non loqui de eâ compositione, qua Rationem ex Rationibus constare docet *suprà n*.46; sed compositam, seu conjunctam vocat hìc Rationem: quando scilicet in proportione, antecedens, & consequens unius Rationis simul sumpta, instar unius antecedentis, ad ipsum consequens comparatur: & itidem in sequenti Ratione; adeò quòd à divisis Rationum terminis ad conjunctos, seu compositos valeat Rationum subinferri similitudo. Ut si ver:gra: ex eo quòd Def. 14. 5.

	componendo, seu conjungendo inferamus; ergo	A 9 Anteced. & B 6 Consequens
Est A 9 Antec.		Erit AB 15 Simul
Ad B 6 Conseq.		Ad B 6 Conseq. ipsius
		C 12 Anteced. & D 8 Consequens
Ut C 12 Antec.		Sicut CD 20 Simul
Ad D 8 Conseq.		Ad D 8 Conseq. ipsius

51 *Divisa Ratio, seu divisio Rationis, est sumptio excessûs, quo antecedens excedit ipsum consequens, ad ipsum consequens.* Hic arguendi modus est præcedenti contrarius: à conjunctis enim arguitur ad divisa. Est igitur comparatio excessûs conjuncti antecedentis supra consequens proprium, ad ipsum consequens. Ut si ex eo, quòd in *composita Ratione*

Def. 15. 5.

Est A 9 antec. & B 6 conseq. totū AB 15 simul cōjūct.	Dividēdo, seu disjūgēdo inferamus; ergo	Erit pars A 9	excessus cōjūcti anteced. supra cōseq. proprium.
ad partē B 6 conseq. ipsum		ad cōpartē B 6 cōseq. ipsū	
Ut C 12 antec. & D 8 conseq. totū CD 20 simul cōjūct.		Sicut pars C 12	excessus cōjūcti anteced. sup. cōseq. proprium.
ad partē D 8 conseq. ipsum		ad cōpartē D 8 conseq. ipsum.	

Est enim A differentia, qua tota quantitas AB, simul sumpta, B superat: Sicut & C itidem est differentia, qua tota CD excedit ipsam D.

52 *Conversio Rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequens.* Hoc est conversio Rationis, quam nonnulli *reflexam* illationem appellant, est comparatio antecedentis ad

Def. 16. 5.

 dif-

differentiam terminorum, velut ad consequens: Ut si ver: gra: ex eo quòd in *compositâ Ratione.*

Est totũ A B	A 9 antec: & B 6 conseq. 15 simul cõjũct.	inferamus ergo per cõversionem Rationis.	Erit totũ A B 15.	excessũ quo antecedẽs A B superat ipsũ cõsequ. B
ad partẽ B	6 conseq. ipsum		Ad reliquã partem A 9.	
Ut totũ C D	C 12 antec. & D 8 conseq. 20 simul cõjũct.		sicut totũ C D 20.	excessũ quo antecedẽs C D superat ipsũ cõseq. D.
ad partẽ D	8 conseq. ipsum		Ad reliquã partem C 12.	

Sunt enim A, & C differentiæ, quibus utrumque *Compositum* antecedens A B, & C D suum, excedit consequens B, & D.

53 *Ex æqualitate Ratio*, seu *Æqua Ratio est, si plures duabus sint quantitates, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eâdem Ratione: Cùm ut in primis quantitatibus prima ad ultimam sit & in secundis quantitatibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel aliter: sumptio extremorum per subductionem mediorum.* Hoc est, *Æqua Ratio*, seu *Proportio ex æquo* est: quando si plures duabus fuerint quantitates in unâ serie, & totidem in aliâ, quæ binæ binis in eâdem Ratione comparentur, eadem infertur extremarum Ratio quantitatum in utrâque serie, subducendo intermedias. Ut si in duabus seriebus: A B C: E F G: *æqualem* multitudinem habentibus terminorũ, fuerit ut A ad B, ita E ad F: & ut B ad C, ita F ad G: vel A ad B, ut F ad G: & B ad C, ut E ad F; & concludendo inferatur *ex æquâ Ratione*: ergo ut erit A ad C, ita ad G. Hic arguendi modus *ex æquâ Ratione* vocitatur. Def. 17. 5.

A B C

E F G

54 Hæc autem *ex æqualitate Ratio*, seu *ex æquo*

Proportio duplex: alia scilicet *Ordinata*, alia verò *Perturbata*.

55 *Ordinata proportio est, cùm fuerit quemadmodum antecedens ad consequens, ita antecedens ad consequens: fuerit etiam consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.* Hoc est: quando in utrâque serie quantitates binæ binis eodem ordine comparantur, quo singulæ in propriâ serie sibi invicem succedunt; & exinde eadem inferatur in utrâque serie Ratio extremorum. Ut si in duabus seriebus: A, B, C: E, F, G: quoniam est A ad B, ut E ad F, sesquialter: & B ad C, ut F ad G, dupl: inferamus; ergo erit ut A ad C, ita E ad G, utrumque nempe triplum. Hæc illatio appellatur *ex æquo Ordinata Proportio*.

Def. 18. 5.

A	B	C
18.	12	6.
E	F	G
6.	4.	2.

56 *Perturbata autem proportio est, tribus positis quantitatibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares: cùm ut in primis quidem quantitatibus se habet antecedens ad consequens, ita in secundis quantitatibus antecedens ad consequens: Ut autem in primis quantitatibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis quantitatibus aliud quidpiam ad antecedens.* Quando scilicet fuerit, ut A ad B, ita F ad G: & ut B ad C, ita E ad F: atque iterum inferatur; ergo erit, ut A ad C, ita E ad G utrumque similiter triplum. Hæc illatio appellatur *ex æquo perturbata proportio.*

Def. 19. 5.

A	B	C
18.	12.	6.
E	F	G
6.	4.	2.

57 *Progressio*, quæ hic sumitur pro finitâ serie terminorum proportionalium, duplex est: *geometrica* scilicet, & *aritbmetica*, sicut & de proportione dictum est, licèt utraque numeris hìc exprimatur.

58 Progressio *geometrica* continet terminos *geometricè proportionales suprà n. 39.*

59 Progressio verò *aritbmetica* continet terminos *aritbmeticè proportionales*: hoc est *æqui-differentes*, quorum scilicet idem sit mutuus *excessus. ibidem num.* 40.

60 Utraque tamen habet dici *par*, vel *impar*: *parium*, vel *imparium*: *continua*, vel *discontinua*, seu *intercisa*.

Pro-

61 Progressio *par* est, quæ parem continet terminorum numerum: putà, quæ *quatuor*, *sex*, *octo*, vel *decem &c. terminos* continet.

62 Progressio *impar* dicitur, quæ imparem continet terminorum numerum, putà, quæ vel *tres*, vel *quinque*, vel *septem*, vel *novem*, *&c. terminos* continet.

63 Progressio *parium* dicitur, in quâ solùm numeri *pares* recensentur.

64 *Imparium* verò progressio dicitur, ubi solummodò numeri *impares* reponuntur: quæ soli arithmeticæ progressioni convenit.

65 Progressio *continua* dicitur, cujus omnes termini sunt *continuè proportionales*, de quibus suprà diximus *n*.42. Ut

In progressione	geometricâ	A	B	C	D	E	F	cõtinuâ
		2.	4.	8.	16.	32.	64.	
	arithmeticâ	G	H	I	K	L	M	
		2.	4.	6.	8.	10.	12.	

Ubi, scilicet in geometricâ progressione A F, eadem est Ratio A ad B, quæ est B ad C, & C ad D, & D ad E, & E ad F, nempe *subdupla*. Ubi vides medios terminos B, C, D, E bis sumi, semel ut *antecedentes*, & semel ut *consequentes* æqualium Rationum. Quod quidem facit, terminos esse *continuè* geometricè proportionales: progressionemque eos continentem dici *continuam*.

Similiter in arithmeticâ progressione G M, idem semper est excessus, quo antecedentes termini à consequentibus superantur: velut inter G, & H: ac inter H, & I: & inter I, & K: & inter K, & L: & inter L, & M: nempe binarius. Ubi vides medios terminos H, I, K, L, similiter bis sumi. Quod quidem facit terminos esse *continuè* arithmeticè proportionales, progressionemque eos continentem dici *continuam*.

66 Progressio *discontinua* dicitur, cùm Rationis continuatio *in medio interciditur*; ita ut Ratio duorum terminorum, immediatè prope medium existentium, sit alia ab eâ, quæ semper eadem continuetur inter reliquos terminos tum anteriores, tum posteriores ejusdem progres-

gressionis. Quod quidem non tollit æqualitatem Rationum: sed solùm admittit aliquam interruptionem in medio progressionis. Ut

		A B C D E F	
In progressione	geometricâ	2. 4. 8. 6. 12. 24.	discontinuâ.
	arithmeticâ	G H I K L M	
		2. 4. 6. 1. 3. 5.	

Ubi, scilicet geometrica progressio A F dicitur quidem *discontinua*, seu *intercisa*; quia, & si priores ejus termini A, B, C sint inter se continuè proportionales in Ratione subduplâ, & similiter tres reliqui posteriores D, E, F sint inter se continuè proportionales in eadem Ratione subduplâ, attamen *in medio* progressionis, scilicet inter terminos C, & D *intercidi-tur* Ratio: siquidem Ratio C ad D non est subdupla, sed sesquitertia; & ideò progressio dicitur *intercisa*, & *discontinua*. Quod solùm accidere solet in *pari* numerorum progressione.

Et similiter arithmetica progressio G M dicitur *discontinua*. Nam, & si tres priores termini G, H, I sint inter se continuè arithmeticè proportionales, sicut & tres posteriores H, L, M, *in medio* tamen progressionis inter terminum I, & terminum K, *interrumpitur* Rationis continuatio, ut vides: est enim alius excessus inter terminum I, & terminum K, quàm inter cæteros successivè; ideoque arithmetica progressio dicitur *intercisa*, seu *discontinua*.

67 Prætereà arithmetica, & continua progressio dicitur *naturalis*, quando scilicet continet terminos secundùm *naturalem* ipsorum *originem*, & *successionem* recensitos. Et hoc tripliciter: nimirùm progressio naturalis dicitur, vel *absoluta*, vel *parium*, vel *imparium*.

68 Naturalis *absoluta* dicitur, in quâ omnes termini ab initio usque ad finem continuè differunt *solâ unitate*; videlicet quando numerus sequens superat unitate præcedentem, vel è contra; ut progressio 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. vel 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. &c.

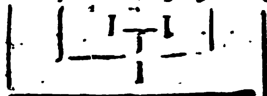
69 Naturalis *parium* progressio dicitur, in quâ omnes termini sunt numeri *pares*, atque *successivè* æquidifferentes *solo binario*; ut progressio 2. 4. 6. 8. 10. 12. &c. vel è contra. Na-

170 Naturalis *imparium* progressio dicitur, cujus omnes termini sunt numeri *impares*, atque *successivè* æqui-differentes *solo binario*: Ut progressio 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c. vel è contrà.

171 In pari geometricâ progressione numerorum sive continuè, sive discontinuè, proportionalium *productum* extremorum semper est æquale *producto* binorum mediorum contrapositorum. Numeri *contrapositi* hic dicuntur, qui æqualiter distant à progressionis medio.

Ut in pari progressione *productū* terminorū extremorum A, & F, aut mediorum contrapositorum B, E: vel C, D semper est

A B C D E F
2. 4. 8. 15. 30. 60. discontinuâ.

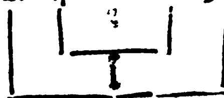


120.

72 In impari vero geometricâ progressione *quadratum* medii termini est æquale *producto* binorum intermediorum contrapositorum, sicut & extremorum.

Ut in impari progressione *productum* extremorum A, E, & binorum intermediorum contrapositorum B, D, nec non & *quadratum* medii C semper est

A B C D E
2. 4. 8. 16. 32. contiuuâ.

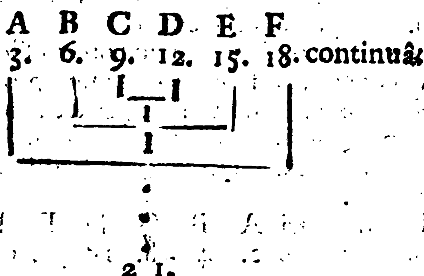


64.

73 In pari autem arithmeticâ progressione numerorum sive continuè, sive discontinuè, proportionalium

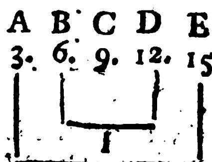
lium *summa* extremorum æquatur *summa* binorum intermediorum contrapositorum.

Ut in pari progressione arithmeticâ continuâ *summa* tam extremorum A, F, quàm binorum intermediorum B, E, & C, D semper est



74 In impari verò hujuscemodi progressione *duplum* medii termini æquabitur *summa* quorumlibet binorum intermediorum contrapositorum, nec non & extremorum.

Ut in impari progressione arithmeticâ *summa* tam extremorum A, E, quàm binorum intermediorum B, D, nec non & *Duplum* medii C, semper est



Quamplurima de iis adhuc dicenda non desunt, quorũ non est hìc locus; sed alibi jucundior sermo redibit: idcirco Tyroni satis.

§. III.

§. III.

Praxes Algorithmicæ,

vulgò

Regulæ Abaci.

Ex probatis Authoribus depromptæ.

1 DEnarius numerus decem unitatibus est æqualis. *Centenarius* centum unitatibus. *Millenarius* mille unitatibus. Itaque consequenter *Binarius* duabus unitatibus est æqualis; *Ternarius* tribus, *Quaternarius* quatuor, &c.

2 Novem sunt arithmetici *Characteres significativi*, quibus numeri omnes scribuntur: nimirum,

1. Unum	6. Sex
2. Duo	7. Septem
3. Tria	8. Octo
4. Quatuor	9. Novem
5. Quinque	

Quorum quilibet tot unitates in se habere significat, quotas singuli nomen exprimit in propositâ serie adjunctum. Est præterea *character expletivus*, 0, *zerus*, seu *nihil* ab Arithmeticis appellatus, qui, sive ante omnes characteres, sive per se, & solitariè positus, nihil significat; adjunctus tamen cuivis characteri ad dextram legentis habet ipsum decies adaugere. Ut sic, 01, idem sonat, ac sola unitas: plures pariter zeri, 00, solitariè positi, idest sine charactere *significativo*, nihil exprimunt; At sic, 10, decem importat: hoc est unitatem decies adauctam. Juxta illud.

Si unum addas nihilo, aut nihilũ, nihil inde creatur:
Si nihilum uni addas, nascitur inde decas.

Omnes autẽ *characteres* solẽt quoq; appellari figuræ.

3 Omnis numerus tum uno, tum pluribus scribi potest characteribus. Unde fit, quod omnis numerus dicatur vel *Digitus*, vel *Articulus*, vel *mixtus*.

4 *Digitus*, seu simplex numerus dicitur, qui uno tantùm ex novem significativis scribitur charactere. Ut est 1. vel 2. vel 3. vel 4. vel 5. vel 6. vel 7. vel 8. vel 9. dumtaxat.

5 *Articulus* dicitur quando *digitus* unum, aut plures post se zeros habet adjunctos. Ut 10. 30. 500. 7000. 8000. &c.

6 Numerus *mixtus* dicitur, qui duobus, aut pluribus digitis notatur. Ut 35. 943. 11. 450. &c.

7 Præterea numerus dividi solet in *numerantem*, & *numeratum*.

8 Numerus *numerans* est numerus ab hac, vel illâ materiâ penitus *abstractus*: id est mensura, quâ res omnes metimur, seu numeramus. Sicque omnes numeri *numerantes* inter se differunt *specie*: cum quilibet numerus *numerans* sit ipsa-met *species*, quæ ab aliis distinguitur.

9 Numerus verò *numeratus* hic accipitur pro rebus ipsis numeratis, quibus ipse *concretus* est. Ut *hominum*, aut *lapidum* multitudo: putà cùm dicitur, *quadraginta*, aut *viginti homines*, *quadraginta*, aut *viginti lapides*. Ubi distinctionem specificam numerati non desumimus à *numerante* 40. aut 20. sed à rebus ipsis *numeratis*, putà *hominibus*, *lapidibus* &c. Sicque non omnes numeri numerati inter se specie differunt; sed solùm specie diversificari censentur juxta diversas rerũ species, quas significant, putà *homines*, *lapides*, &c. Unde licet numerus 40. hominum, & numerus 20. hominum inter se differant specie, secundùm *numerantem* 40, & 20; tamen non censentur specie differre secundũ *numeratum*, qui significat *homines* in utroque. Sicut, & numerus 20 hominum, & numerus 20 lapidum, licet non differant specie secundùm *numerantem* 20, & 20, qui idem est in utroque; tamen dicimus illos specie differre secundum *numeratum*, qui res diversæ speciei significat: *homines* scilicet, & *lapides*.

10 *Positio* Characterum est eorum alicubi ordinata situatio, quæ duplex tantùm contingere potest: *horizontalis* scilicet, & *verticalis*.

11 *Positionem horizontalem* hic appellamus: quando characterum series à *sinistrâ* ad *dexteram* *legentis* extenditur. Ut series A B.

A 1 3 7 8 9 1 0 7 B

12 *Positio* verò *verticalis* dicitur: quando characterum series à *capite ad pedes* protenditur *legentis*. Ut series B C

B 9
7
8
7
1
C 2

12 *Notatio* uniuscujusq; numeri est ejus scriptio, seu designatio per proprios caracteres *horizontaliter* positos. Ut A B

A 79195863 B

14 *Notatio* autem *respectiva* duorum, aut plurium numerorum etiam dupliciter occurrere potest: *horizontaliter* scilicet, & *verticaliter*.

15 *Numeros horizontaliter* notamus: quando singulorum series in eadem horizontali linea separatim scribimus. Ut notantur numeri A & B

A 197056. B 810456.

16 *Numeros* verò *verticaliter* notamus: quando ita numerum numero subscribimus, ut incipiendo à dextris, primam figuram unius numeri directè locemus sub prima alterius, & secundam unius directè sub secunda alterius &c: donec totus numerus verticaliter numero subscribatur. Et si quis excessus à sinistris inveniatur in uno numero, aut in pluribus, eum ad *laevam* relinquimus; ut factum vides in numeris C, D, E verticaliter notatis.

C	5167
D	86723
E	259441

17 Porro characteres omnes horizontaliter positi (*supra n.* 11.) qui nullo interjecto puncto, sive lineola, continuè sibi invicem succedunt, *unicam referunt numeri speciem*, idest *unicum* censentur conficere *numerum*. Ut patet in trina characterum horizontaliter positorum serie A, B, C.

B 569

A 3589

C 191267

Ubi cùm nullum ſit punctum, aut lineola ſingularum intercidens ſeu disjungens characteres, ſingulæ ſeries unicam important numeri ſpeciem, ideſt unicum conficiunt numerum ſive *numeratum*, ſive *numerantem*.

18 Quando verò in horizontali poſitione, characterum ſeries fuerit vel lineolâ, vel puncto interciſa: datur intelligi, tot ibi numerorum *ſpecies* ſive numerantium, ſive numeratorum adeſſe, quotæ fuerint in eâ interciſiones. Ut in ſerie A C tria membra A, B, C, quia punctis ſeparata, tres ſanè numerorum ſpecies repræſentant.

A B C
378: 15: 25:

Corol. I. Ex dictis colligitur, quòd numeri horizontaliter notati, ut in plurimum, cenſentur eſſe inter ſe *diverſæ ſpeciei* tum *numerantis*, tum *numerati*. Ut præfati numeri A, B, C.

Coroll. II. Numeri verò verticaliter notati regulariter ſolent *ejuſdem ſpeciei* referre *numeratos*: putà vel ſimul homines, vel ſimul nummos, vel ſimul lapides, &c.

19 *Numeratio*, ſive lectio numeri, eſt ejus, per proprios characteres deſcripti, expreſſio.

20. Quilibet autem character in numero duplicem habet valorem: unum ſcilicet proprium ratione ſui: alterum localem ratione loci, quem occupat in horizontali characterum poſitione.

21 Character ratione ſui tot ſimplices valet unitates, quotàs ejus exprimit nomen (*ſupra n.2.*)

22 Character verò ratione loci, ſeu *Sedis*, qua in numero collocatur, variam, pro diverſitate *membrorum*, & *Sedium*, denominationem ſumit.

23 In quolibet numero tot *Sedes* eſſe concedimus, quotis figuris ipſe notatur. Ut in numero veri gra: Q A quindecim *Sedes* eſſe dicitur, quia quindecim ille ſcribitur figuris.

qponmlihgfedcba
657314107899354

Ex

24 Ex Sedibus autem, singulæ ternæ, ut vides, lunulis distinctæ, unicum *membrum* efficiunt, propriam habens denominationem. qua Sedes inde cognominantur.

25 Ordo verò *Sedium*, & *membrorum* incipit à dextris legentis versus sinistram (fortassis, quia Algorithmi inventores ita legere, & scribere consueverunt); ita quòd ea dicatur prima Sedes, quæ à dextris est ultima A: ultima verò ea putetur esse, quæ à sinistris est prima Q. Sicut & primum Membrum dicatur id, quod à dexttis est ultimum. A B C: ultimum verò id, quod à sinistris est primum. O P Q.

26 Membrorum primum denominatur ab unitatibus simplicibus: Secundum à millibus: Tertium à millionibus: Quartum à Billionibus: Quintnm à Trillionibus: Sextum à Quatrilionibus, &c.

27 Sedium verò singulæ ternæ Membrum conficientes similem denominationem habent, nimirum: cujuslibet membri *Prima* à dextris semper est *monadum*, seu *unitatum* Sedes; sequens autem *Secunda* versus sinistram Sedes est *decadum*; *Tertia* verò sequens Sedes est *centenariorum*. Et ita consequenter est in singulis membris repetendum à dextris legentis versus sinistras, quoadusque numerus extiterit.

Singulæ tamen Sedes cognominantur à Membro, cujus sunt Sedes; ut satis inter se distinguantur.

Ut in allato exemplo numeri Q A Primum *mem-*

qponmlihgfedcba

6573 14 1078 99354

brum A B C continet *monades*, *decades*, & *centenarios Unitatum simplicium*. Secundum *membrum* D E F continet monades, decades, & centenarios *Milliū*. Tertium *membrum* G H I continet monades, decades, & centenarios *Millionum*: Quartum *membrum* L M N continet monades, decades, & centenarios *Billionum*. Quintum *membrum* O P Q continet monades, decades, & centenarios *Trillionum*; Et ita consequenter de aliis *membris*, si auctior fieret numerus ad lævam per *Quatriliones*, *Quinquiliones*, &c.

Ita-

Itaque datus numerus sic legi, seu numerari debet: *Sexcenti quinquaginta septem trilliones; trecenti quatuordecim billiones, centum septem milliones, octingenta nonaginta novem millia, trecenta quinquaginta quatuor unitates simplices.*

Ubi vides, quàm expedita sit hæc numerandi methodus, cœterisque præstantior. Cùm hac omnino vitemus illud *millies*, aut *millium*, defectu vocum ab aliis subrogatum, toties repetere (quod mihi videtur potius confusionem parere, quàm discretionem); proindeque numeri lectio hoc modo perspicua, ac æquè facilis reddatur. Ponitur hîc igitur tabella ordinem ostendens, quo *membra*, *sedes*, ac eorumdem *denominatio* à dextris ad lævam extenduntur legentis.

Membra.	Sedes.	Denominationes.
Primum Membrum continet	1 Monades 2 Decades 3 Centenarios	Unitatum simplicium.
Secundum Membrum continet	4 Monades 5 Decades 6 Centenarios	Millium.
Tertium Membrum continet	7 Monades 8 Decades 9 Centenarios	Millionum.
Quartum Membrum continet	10 Monades 11 Decades 12 Centenarios	Billionum.
Quintum Membrum continet	13 Monades 14 Decades 15 Centenarios	Trillionum.
Sextum Membrum continet	16 Monades 17 Decades 18 Centenarios	Quatrilionum.
Septimum Membrum continet	19 Monades 20 Decades 21 Centenarios	Quinquilionū.

Et

Et sic deinceps pro cæteris Membris, si plura his numerus admiserit.

28 In quolibet numero pluribus notato figuris, duæ quævis Sedes immediatè sibi invicem succedentes decuplam habent inter se Rationem. Ut ver: gra: in numero F A, prima Sedes A est subdecupla ad Sedem B: & Sedes B est subdecupla ad C: & Sedes C ad D. &c:

F E D C B A

7 3 8 0 5 4

Quod ita intelliges, nimirum: quòd decem monades faciunt unam decadem; & decem decades faciunt unum centenarium *Unitatum simplicium*. Itē decem centenarii *Unitatum simplicium* faciunt unam monadem *Millium*; & decem monades *Millium* unam decadem, & decem decades unum centenarium *Millium &c*: Et, è converso: centenarius *Millium* continet, seu valet decem decades; & decas *Millium* valet decem monades Millium. Item monas *Millium* valet decem centenarios *Unitatum simplicium*; & centenarius valet decem decades; & decas decem valet *Unitates simplices*. Unde sequens infertur præceptum.

29 Duo characteres in unâ Sede ne scribantur. Cùm enim quantitates, quæ ad unamquamque numeri Sedem pertinere dicuntur, sive monades sint, sive decades, &c: plusquam novem esse non possunt; (decem quippe monades decadem faciunt, quæ propterea ad decadum Sedem pertinere debet: sicut & decem decades faciunt centenarium, qui proinde ad centenariorum Sedem spectat) ideo singulæ quantitates in Sedibus singulis unico tantùm notari debent charactere. Quod si plures quàm novem ver: gra: sub primâ Sede monades occurrunt, jam decades fiunt, quæ ampliùs hujus Sedis non sunt, sed ad decadum Sedem pertinere censentur, cui & adscribantur. Et similiter in Sede decadum si invenirentur plures, quàm novem decades, jam decadum decades fiunt, idest centenarii, qui propterea centenariorum Sedi sunt adscribendi. Et solùm id in quavis Sede relinquatur, quod, demptis decadibus, superfuerit, ut dicetur infra.

30 Nulla Sedes posteriorem habens vacua sit (*posteriorem* hìc appellamus Sedem, quæ secundùm ordinem Sedium supra traditum n.25.27. &c: aliam subsequitur

quitur Sedem: sicut & *anteriorem* dicimus, quæ in eodem ordine aliam præcedit); sed aut aliquem ex novem significativis characteribus habeat, aut saltem zerum: qui propter explendam Sedem sufficienter apponitur, unde & expletivus dicitur character. Nam si nullus esset in illâ Sede character, jam posterior figura ad eam spectare videretur: quod maximè vitandum est, ne Mẽbrorum exoriatur confusio, Sediumque perturbaretur ordo, in quo consistit tota ratio numerandi. Ut in numero D A sint septem millenarii, nulli centenarii, nullæque decades, cum sex monadibus; jam si nullo charactere, aut saltem zero explerentur Sedes illæ, propositus numerus duabus tantùm maneret notatus figuris, puta 76, quæ duas Sedes important: monadum scilicet, & decadum; Sicque septem millia evaderent septuaginta, quod maximus foret error. Debet igitur in utrâque illâ Sede zerus apponi, qui est character expletivus, ut valeant posteriores proprium in numero possidere locum, valoremque referre quem significant.

D	C	B	A
7	0	0	6

31 Denique numerus dicitur vel *integer*, vel *fractus*.

32 *Integer* hic vocatur numerus, cujus species, aut denominatio per se sola consideratur.

33 *Fractus* verò numerus dicitur, cujus species sumitur ut pars, quatenus ad aliam numeri speciem ordinatur. Estque duplex: *abstractus* scilicet, & *concretus*.

34 Numerus *fractus abstractus*, seu *fractio abstracta* duobus notatur terminis, quorum unus verticaliter alteri subscribitur, lineolâ intermediâ; Terminus superior semper vocatur *numerator*, inferior verò *denominator*. Est autem *fractio abstracta* pars, aut partes unius integri. *Numerator* enim per suas unitates indicat, quæ & quot particulæ sumantur ex integro uno in tot particulas diviso, quotæ fuerint *denominatoris* unitates. Ut in fractione A B, superior terminus A est *numerator*, inferior verò B est *denominator*, quibus significantur duæ tertiæ partes unius integri: hoc est, quòd ex uno integro in particulas denominatoris B, idest in 3 diviso, numerator A indicat, duas tantùm desumen-

mendas esse particulas. Et similiter in fractione C D significantur quatuor quintædecimæ partes unius integri: hoc est, quòd ex uno integro in particulas 15 diviso, numerator C indicat, quatuor tantum hìc accipiendas esse particulas.

A	2	C	4
B	3	D	15

35 Fractus verò concretus dicitur numerus, quando species rei *numeratæ* (*supra n.9.*) ex placitâ hominum impositione comparatur ut pars ad aliam numerati speciem. Sicque *assium* numerus *vulgò soldi*, seu *grani* dicitur fractus in ordine ad *tarenos*: quia *assis* censetur *tareni* pars. Et numerus *tarenorum* dicitur fractus in ordine ad *Uncias*: quia tarenus pars est *Unciæ*.

PRAXIS I.

De Additione numerorum integrorum.

1 ADditio, græcè *Prothesis*, est plurium numerorum in unam summam *collectio*: vel inventio unius numeri, qui omnibus datis numeris simul sumptis sit æqualis: & vocatur *Summa*, seu *Aggregatum*. (*supra n.16.§.1.*)

2 Debent autem integri numeri sub eâdem denominatione proponi, putà qui ejusdem denominationis res significent, nimirùm, vel *homines*, vel *equos*, vel *nummos* &c. Ideoque non sunt simul addendi *hominum* multitudo, & *lapidum*, aut *numerorum &c.* quia ex illorum aggregato nemo dignoscere posset solam *hominum* summam, vel solam *lapidum* quantitatem, aut solùm *numerorum*; sed tantummodo innotesceret, quota individua sint simul illa.

3 Numeri numeris *verticaliter* notentur (*supra n.16.*) & in calce linea ducatur.

4 Facto initio à primâ Sede à dextris (*supra n.27.*) *colligatur* in unum quidquid sub eâdem invenitur *verticaliter* notatum.

5 *Collectum*, ex figuris in eâdem Sede directò suppositis resultans, vel *uno* scribendum est charactere, vel *pluribus*. Si *uno* scribi potest, statim infra lineam eidem Sedi *subscribatur*. Si *duobus*, aut *pluribus* scribendum

 esset

esset characteribus: tantùm *primus*, qui à dextris notaretur legentis, eidem Sedi subscribatur; *reliquus* verò, aut *reliqui* pro succedente Sede versus lævam *reserventur*. Vel quod idem est. Collectum ver:gra: ex primâ Sede, si novenarium non excedat, eidem subscribatur Sedi; si verò excesserit, ex collecto eruantur, quò fieri potest, decades: & si quod remanet (quod numquam poterit 9 excedere) in calce ejusdem Sedis subscribatur. Decades autem, velut unitates, addantur ei, quod colligetur in sequente Sede versus sinistram. Et ita observandum pro reliquis Sedibus colligendis; ut tandem infra lineam procreetur numerus, qui propterea æqualis erit omnibus datis simul sumptis; Et hic *Summa* vocatur.

Exemplum.

6 Sint dati numeri A, B, C, D, E simul in unũ addendi.

7 Numeri numeris *verticaliter* notentur, ita ut omnes characteres, simplices Monades referentes, *verticaliter* ponantur sub primâ Sede O; qui verò decades important, omnes verticaliter subponantur secundæ Sedi N; qui centenarios, tertiæ M; qui millenarios; quartæ Sedi L; & ita consequenter de reliquis Sedibus. Idque ideò, ut membra membris, & Sedes Sedibus respondeant: monades scilicet monadibus, decades decadibus, & centenarii centenariis &c.

	L	M	N	O
A	3	8	7	5
B		3	0	1
C	7	4	3	2
D	1	9	8	7
E	5	9	0	9
F 1	9	5	0	4

Colligantur in unum characteres sub primâ Sede O *verticaliter* positos: dicaturque 5, & 1, & 2, & 7, & 9 faciunt 24; quod, quia novenarium excedit, scribi deberet duobus characteribus, ut vides; ideòq; subscribatur ejus primus character 4, reliquus verò 2 mente reservetur: ut inde collectioni Sedis secundæ N addatur.

Colligantur similiter in unum characteres Sedis secundæ N: dicaturque 7, & 3, 8 faciunt 18, cui si addatur 2 ex proximâ Sede O mente reservatum, fit 20. Subscribo ergo 0; at 2 mente reservo.

Et similiter in tertiâ Sede M, dicam 8, & 3, & 4, & 9,

& 9, & 9 faciunt 33, cui si addatur 2 ex proximâ Sede N mente retentum, fit 35. Subscribo ergo 5; at 3 mente reservo.

Et tandem in quartâ Sede L 3, & 7, & 1, & 5 faciunt 16, cui si addam 3 ex proxima Sede M mente reservatum, fit 19. Subscribo ergo 9; at mente reservo unum.

Sed quia non adest alia Sedes in datis numeris, cui hoc unum addatur, ipsum ad lævam relinquo. Ut vides factum in aggregato F. infra lineam notato.

Est autem numerus F *summa*, seu *aggregatum* peractæ *additionis*: quod est æquale omnibus datis numeris A, B, C, D, E simul sumptis.

PRAXIS II.

De Subtractione numerorum integrorum.

1 Subtractio, seu Subductio, græcè *Aphæresis*, est inventio *excessus*, quo major numerus minorem superat.

2 Ex quo intelliges, in *Subtractione* nonnisi *duos*, & *inæquales* intervenire numeros: hoc est, quòd minor numerus sit à majore subtrahendus, ut pateſcat excessus.

3 Numerus autem major altero censetur is, qui plures figuras habet, quàm alter: aut si par fuerit in utroque figurarum multitudo, ille major dicitur, in quo primò occurrit à sinistris major figura.

4 Minor numerus semper majori verticaliter subscribatur: servatis iis, quæ in præcedente praxi docuimus, ita quòd monas monadi respondeat, decas decadi, centenarius centenario &c. Sicque major numerus dicatur *superior*, minor verò *inferior*.

5 Deinde facto initio à dextris minor numerus à majore subtrahatur, ut exemplificatur infra.

6 Excessus verò ex subtractione resultans vocatur *Differentia*, seu *Residuum*.

Exemplum I.

7 Sint dati duo numeri, quorum minor B verticaliter

liter subscribatur majori A, ita quod monas monadi respondeat, decas decadi &c: & linea infra ambos ducatur.

8 Incipiendo igitur à dextris auferatur prima figura 2 numeri inferioris ab 4 primâ figurâ numeri superioris: dicaturque 2 ab 4, remanet 2, quod infra lineam scribatur. Deinde 3 ab 3 nihil remanet, ideoque ad explendam hanc Sedem zerus subscribatur. Itē 1 ab 6 remanet 5, subscribendum. Et tandem 4 ab 5 remanet 1, quod itidem subscribatur. Dico numerum C esse excessum, quo numerus A major superat minorem B: qui propterea *differentia*, seu *residuum* vocari solet.

A	5	6	3	4
B	4	1	3	2
C	1	4	0	2

9 Dum autem figura inferioris numeri major fuerit figurâ sibi respondente numeri superioris; ita quòd subtractio in eâdem Sede fieri nequeat: major enim à minore subduci non potest; Tunc superiori figuræ addatur decas, ut ex eâ jam adauctâ subtrahi possit inferior; Sequens verò in eodem superiore numero figura, ex qua intelligitur accepta decas illa, minuatur unitate. Ratio est, quia Sedes sibi invicem immediatè succedentes decuplam habent inter se Rationem, ut dictum est *supra n. 28. hujus* §. ideòque sicut decem ex *anteriore* Sede (supra n. 30. ibidem) faciunt unum in *posteriore* immediatè sequente, ita unum ex *posteriore* Sede evadit decem in *anteriore*. Si verò subsequens illa figura fuerit zerus, qui proinde minui non potest, tunc ejus inferior augeatur unitate. Omnia dilatat

Exemplum II.

10 Sint dati duo numeri, quorum minor B majori A verticaliter subscribatur more solito, & lineola infra ipsos ducatur. Tum in prima Sede subtrahatur 6 ab 5: quod cùm fieri non possit, ex anteriore Sede 9 accipiatur unum idest decas, quæ addita superiori 5 facit 15, dicaturque 6 ab 15 remanet 9, quod subscribatur. Deinde in secundâ Sede subtrahatur 4 non ampliùs ab 9, bene verò ab 8, quia jam ablatum fuit unum ex superiore 9, & remansit 8. Dicaturque 4

ab

ab 8, restat 4 subscribendum.

Insuper in tertia Sede subtrahatur 8 ab 6; quod cùm fieri non possit, dicatur 8 ab 16 remanet 8, quod subscribatur.

A	7101695
B	597846
C	6503849

Item in quartâ Sede subtrahatur 7 non ab 1, quod jam in decadem fuit acceptum pro tertia Sede, bene verò ab 0; quod cùm fieri non possit; subducatur ergo ab 10, & remanet 3 subscribendum.

Sed memento, quòd in quintâ Sede superior 0 minui debet unitate propter decadem jam ablatam; at quia zerus minui non potest, augetur ideo unitate ejus inferior 9, & fit decas, quæ non est ampliùs hujus Sedis, sed ad posteriorem pertinet Sedem, cui velut unitas adjungatur: Ut satis docuimus *supra n.* 28: dicaturque 0 ab 0, remanet 0 subscribendum.

Quapropter in sexta Sede non dicatur ampliùs 5 ex 1, sed 6 ab 1 propter præcedentem decadem adjunctam: quod cùm subtrahi nequeat, subtrahatur ergo ex 11, & remanet 5 subscribendum: & minuatur unitate posterior 7, à quo accepta fuit decas illa: dicaturque tandem, nihil ab 6, remanet 6 subscribendum. Dico numerum C esse datorum A & B differentiam quæsitam.

PRAXIS III.

De Multiplicatione numerorum integrorum.

1 MVltiplicatio numeri per numerum, græcè *Pollaplasiasmòs* fit inter duos numeros sive æquales, sive inæquales, quorum uterlibet vocatur *multiplicandus*, alter verò *multiplicator*. Est igitur mutua duorum numerorum in se invicem *ductio*, ad inveniendum alium numerum, qui toties in se contineat *multiplicandum*, quot sunt unitates in *multiplicante*: & vocatur *productum*.

2 Voces *multiplicatio*, & *ductio*, sive *multiplicare*, & *ducere* idem significant: idem enim est numerum per numerum *multiplicare*, ac numerum in numerum *ducere*.

3 Item idem est multiplicare 8 per 4, quàm multipli-

tiplicare 4 per 8: idem enim *productum* 32 procreatur ex quater octo, quàm ex octies quatuor; licet tamen in pronunciatione semper minor numerus adverbialiter poni soleat: ut potiùs dicatur *quater octo*, quàm octies quatuor.

4 Numerus, qui aliquoties sumitur appellatur *multiplicandus*. Alter verò, in quem ille ducitur, appellatur *multiplicator*. Numerus verò tertius, qui ex illis in se invicem ductis gignitur, *productum* appellatur.

5 Cùm tamen numeri fuerint inæquales; tunc major regulariter poni solet pro Multiplicando; minor vero pro Multiplicatore.

6 Multiplicator igitur Multiplicando verticaliter subscribatur: & linea infra ambos ducatur.

7 Deinde incipiendo à dextris multiplicentur singuli characteres Multiplicandi per singulos Multiplicatoris characteres (pronunciato semper adverbialiter minore ver: gra: quater octo, & non octies quatuor); ut ex binis invicem ductis fiat *productum mentale*: quod vel unicâ, vel duabus notari debet figuris; Si unicâ, id totum eidem Sedi infra lineam subscribe; si duabus, prima à dextris subscribatur, reliqua verò mente reservetur, addenda sequenti *producto mentali*.

8 Quando verò in aliquâ Multiplicandi Sede zerus fuerit: ita quod nullum sit *mentale productum* præter zerum (zerus enim cum quocumque charactere multiplicatus zerum producit); tunc sub eâ Sede, illa figura subscribatur, quæ mente fuerit reservata: & si nulla fuerit reservata, zerus subscribatur. Et sic deinceps in singulis Multiplicandi characteribus, ut tandem consurgat totale Productum: quod toties continebit Multiplicandum, quot sunt unitates in Multiplicatore.

9 Triplex igitur vulgaris contingere potest Multiplicatio ratione Multiplicatoris, videlicet per Digitum, per Articulum, & per Mixtum. *Supra n.4. hujus §.*

10 Multiplicatio per Digitum dicitur: quando Multiplicator est Digitus, unico scilicet significativo scriptus charactere. Ut ver: gra: multiplicare 478 per 5, per 3 &c.

11 Multiplicatio per Articulum dicitur: quando Mul-

Multiplicator est Articulus. Ut multiplicare 478 per 10, aut 400 &c.

12 Multiplicatio per Mixtum dicitur: quando Multiplicator est Mixtus. Ut multiplicare 478 per 11, per 37, &c.

EXEMPLUM I.

Multiplicatio per Digitum.

13 Sit numerus A multiplicandus per Digitum B Multiplicatorem. Tum incipiendo à dextris dicatur

A	501028.
B	5
C	2505140.

quinquies 8 producit 40: subscribo 0, & mente reservo 4. Deinde bis 5 producit 10, cui addam 4 mente retentum, & fit 14: subscribo 4, & mente reservo 1. Item quinquies 0 facit 0: subscribo ergo ipsum 1 mente retentum. Deinde semel 5 facit 5, quod subscribo. Item quinquies 0 facit 0, quem subscribo. Tandem quinquies 5 producit 25, quod integrum subscribo, quia nullus adest alius character multiplicandus ad lævam. Dico numerum C esse *productum*, quod ex mutuâ numerorum A & B multiplicatione gignitur.

EXEMPLUM II.

Multiplicatio per Articulum.

14 Sit numerus A multiplicandus per articulum B multiplicatorem. Relictis zeris Multiplicatoris B

A	4269
B	300
C	1280700

fiat omninò multiplicatio per solum Digitum 3, modo quo suprà; & tandem Producto C addantur ad dexteram duo illi zeri relicti, ut factum vides. Dico numerum C esse Productū quæsitum.

15 Non dissimili modo operaberis quoties etiam uterque numerus quomodolibet desinat à dextris per zeros: ut numeri A, & B. Tunc enim relictis zeris finalibus utriusque numeri, fiat multiplicatio per solos

cha-

A	7600
B	600
C	4560000

characteres significativos, & Producto C apponantur ad dexteram omnes zeri finales utriusque numeri: ut factum vides. Dico numerum C esse Productum quæsitum.

EXEMPLUM III.

Multiplicatio per Mixtum.

16 Sit numerus A multiplicandus per Mixtum B multiplicatorem. Incipiendo à dextris multiplica more solito totum A per primum Multiplicatoris Digitū 5, & fiat Productum *partiale* C. Deinde similiter multiplica totum A per reliquum Multiplicatoris Digitum 3 cum sequente cautelâ, & fiat aliud Productum *partiale* D. Cautela est, quòd in multiplicatione per Mixtum, quodlibet Productum partiale incipit verticaliter notari directè sub suo Digito multiplicante: ut in hoc exemplo primum partiale Productum C incipit verticaliter notari sub 5; secundum verò D sub 3. Tandem addantur simul producta partialia C, & D, ut fiat summa E. Dico numerum E esse productum totale ex datis numeris A & B in se invicem ductis generatum.

A	2784.
B	35.
C	13920.
D	8352.
E	97440.

17 Quando in Multiplicatore Mixto intermediat unus, vel plures zeri; tunc his relictis procedat multiplicatio modo jam tradito cum eâdem cautelâ, ut vides factum in numerorum A, & B multiplicatione.

A	2776
B	405
C	13880
D	11104
E	1124280

PRAXIS IV.

De Divisione numerorum integrorum.

1 DIvisio numeri per numerum, græcè *Diæresis*, fit inter duos numeros, sive æquales, sive inæquales, quorum unus æqualium, sive major inæqualium, vocatur *dividendus*: alter verò æqualium, sive minor inæqualium, vocatur *divisor*. Divisio igitur est inquisitio alicujus tertii numeri indicantis per suas unitates, quoties Dividendus contineat Divisorem: Numerus autem inventus appellatur *quotiens*.

2 Triplex quoque contingere potest divisio ratione Divisoris, nimirum: per Digitum, per Articulum, & per Mixtum. Quemadmodum insinuavimus suprà in Multiplicatione n. 8. putà cùm Divisor fuerit Digitus, aut Articulus, aut Mixtus.

EXEMPLUM I.

Divisio per Digitum.

3 Sit numerus A dividendus per Divisorem Digitum B.

4 Divisor B notetur *horizontaliter* à sinistris Dividendi A. ut vides factum.

5 Deinde, incipiendo operationem à sinistris, inquire attentando, quoties Divisor Digitus 3 contineatur in ultimâ figurâ 5 à sinistris Dividendi. Dicque: 3 in 5 continetur tantùm semel; scribe ergo 1 sub 5: quod erit prima, seu ultima figura Quotientis C, & dele 5. Deinde multiplica hanc inventam Quotientis figuram 1 per Divisorem 3, & fit Productum 3, quod mentaliter subtrahes ab 5, & remanet 2, quod mete retine decuplò addendum antecedenti Sedi 6, ut fiat 26.

B 3 | A 5689
C $1896\frac{1}{3}$

Item comparabis Divisorem 3, non ampliùs cum 6, benè verò cum 26, propter duas decades mente re-

 ten.

tentas, eique adjunctas. dicesque: 3 in 26 ad plus continetur octies. subscribe 8, quod protinus multiplica per Divisorem 3, & producitur 24, quo subtracto ab 26, remanet 2, decuplò addendum anteriori Sedi 8, & dele 6. Fit ergo 28; dicesque: 3 in 28, ad plus continetur novies; ideoque subscribe 9, quod similiter multiplica per divisorem 3, & producitur 27, quo subtracto ab 28, remanet 1 declupò addendum anteriori, idest primæ Sedi 9, & dele 8. Sicq; fit 19. Dicesque: 3 in 19 ad plus continetur sexties; subscribe ergo 6, quod similiter multiplica per Divisorem 3, & producitur 18, quo subtracto ab 19, remanet 1, & dele 9.

6 Id autem quod postremò remanet, ut hic 1, quia scilicet non est ampliùs, cui addatur ad dexteram, evadit Numerator ad abstractam Integri Fractionem, cujus Denominator erit ipse Divisor 3, putà $\frac{1}{3}$ unum tertium.

Dico numerum C cum fractione unius tertii esse Quotientem quæsitum.

7 Cùm verò Digitus Divisor major fuerit aliquo Dividendi charactere, ita quòd in eo contineri non possit; tunc sub tali charactere scribẽdus est zerus in Quotiente: & character ille Dividendi, simul & proximè *anterior*, accipiantur in unum numerum (servatâ Sedisi Ratione supra n. 28. hujus §.); qui sic auctus valeat Divisorem Digitum continere, atque per eum facilè dividi, ut Quotiens significativus eruatur, quem verticaliter notabis sub eo *anteriore* Dividendi charactere. Ut in divisione numeri A per Digitum B: 5 in 3 contineri non potest, quare subscribe 0 sub 3: & accipiendo in unum ipsum 3 simul cum proximo anteriore 7, dices 5 in 37 ad plus continetur septies; Subscribe ergo 7, quod illicò multiplica per Divisorem 5, & producitur 35, quo subtracto ab 37, remanet 2 decuplò addendum anteriori Sedi 5, & dele totum 37. Eritque propterea 25: tum dicito: 5 in 25 ad plus continetur quinquies; Subscribe ergo 5, quod similiter multiplica

B 51 A 37521

C 07504 $\frac{1}{5}$

per

per Divisorem 5, & producitur 25, quò subtracto ab 25, nihil remanet decuplò addendum anteriori Sedi: & dele 5. Deinde 5 in 2 contineri non potest; quare subscribe o sub 2, & dic: continebitur ergo in 21 ad plus quater; Subscribe ergo 4 sub 1, quod statim multiplica per Divisorem 5, & productum 20 subtrahe ab 21, remanet 1, quod numerator evadit ad Fractionē $\frac{1}{5}$ cujus denominator erit ipse Divisor.

EXEMPLUM II.

Divisio per Articulum.

8 Sit numerus A dividendus per Divisorem Articulum B. Notato horizontaliter utroque numero ut suprà: abscindantur à Dividendo A tot figuræ à dextris legentis quoti fuerint zeri in Articulo Divisore B. Exindeque fiat divisio per Digitum modo jam tradito; Resultabit Quotiens C trecenta quinquaginta Integra cum Fractione, videlicet cum Quadringentis-duodecim Quingentesimis particulis unius Integri.

B 500 | A 1754 | 12

C 0350 $\frac{412}{500}$

EXEMPLUM III.

Divisio per Mixtum.

Nimis trepidare solent sub hac divisione Tyrones; sed levis erit labor, si rectè perpendantur, quæ hic addiscenda proponimus.

9 Sit numerus A dividendus per Mixtum Divisorem B. Notentur horizontaliter ambo numeri de more.

10 Deinde inquiramus attentando, quoties ultima à sinistris figura Divisoris ad plus contineatur in ultimâ à sinistris Dividendi: & penultima Divisoris in penultimâ Dividendi: & ita consequenter reliquæ Divisoris, si quæ sint, in reliquis Dividendi; cum hac tamen

cautelâ, quòd scilicet singulæ in singulis contineantur æqualiter uniformiter, putà vel semel, vel bis, vel ter, vel quater &c. adeò quòd verificetur totum Divisorem pluries contineri non posse in ea Dividendi parte, cum qua facta fuit integri Divisoris comparatio; nullaque proinde tibi sit cura, utrùm multum reliquum remaneat: nequit enim superesse tantum, quod continere nec semel valeat Divisorem.

11 Ut in allato exemplo incipiendo à sinistris sic comparando attentabis: 4 in 8 contineretur bis; at verò 6 non continetur bis in 7. Minues ergo dicendo: 4 in 6 continetur semel, & superest 4, quod decuplò additum præcedenti Sedi 7 facit 47, in quo 6 procul dubio continetur semel. Ubi vides quòd facta est comparatio ultimæ figuræ 4 Divisoris cum ultimâ 8 Dividendi, & penultimæ 6 Divisoris cum penultimâ 7 Dividendi: hoc est 46 cum 87. Et certum est Divisorem 46 non pluries, quàm semel contineri in Dividendi membro 87: bis enim 46 facit 92, quod quidem excedit ipsum 87. Scribe ergo 1 ultimam sit figuram Quotientis C, per quam singulas Divisoris figuras multiplica, singulaque Producta mentalia à singulis subtrahe Dividendi figuris, cum quibus facta fuit comparatio: Residuumque subscribe.

B 46 | A 87901

D 419

50

C 19

12 Quòd si ab his illa subtrahi nequeant, putà si mentale Productum majus fuerit Dividendi figurâ cum qua comparatur, hanc tot decadibus comple, donec subtractio fieri queat; Sed postea minuere memento posteriorem Dividendi figuram tot unitatibus, quot decades fuerant assumptæ ad complēdam anteriorem.

13 Ut in eodem exemplo, dicas; semel 6 facit 6, quo subtracto ab 7 suo correspondente, remanet 1 subscribendum, ut vides: & dele ipsum 7. Et similiter dicas semel 4 facit 4, quo subtracto ab 8, remanet 4 subscribendum, & dele ipsum 8.

Continetur igitur 46 in 87 semel, & remanet 41 Residuum; quod quidem debet semper esse minus Divisore: alioquin poterat ergo Divisor 46 in competen-

te Dividendi membro 87 pluries contineri, quam pro ut indicat Quotiens.

14 Deleto Dividendi membro 87 cum quo facta fuit prima Divisoris comparatio, seu pars divisionis; proceditur ad secundam cum sequente membro, nimirum cum Residuo adaucto: cum enim Residuum semper minus esse debeat Divisore, nequit eum nec semel continere, proindeque nulla fieri potest cum eo divisio. Adaugetur autem Residuum per demissionem, seu translationem proximè sequentis figuræ Dividendi, quæ Residuo dextrorsum adnotatur, ut majus fiat unâ Sede, sicque jam adauctus Divisorem saltem semel continere valeat.

15 Quòd si tamen post demissionem, seu translationem unius figuræ Dividendi A, Residuum adhuc minus sit Divisore, tunc notetur zerus in Quotiente, & è Dividendo A, priore deletâ demittatur, seu transferatur alia figura sequens, ut jam auctius fiat Residuum duabus, sive pluribus, si opus erit, figuris; donec scilicet Divisorem valeat saltem semel continere; tu verò in tali casu quoties figuram è Dividendo A demittis in Residuum, & nihilominus Residuum adauctum adhuc minus inveniretur Divisore, toties zerum in Quotiente C adnotabis.

16 Ut in præsenti exemplo demitte proximè sequentem Dividendi figuram 9, quam Residuo 41 dextrorsum adnotabis, & in Dividendo A delebis; ut jam fiat primum Residuum adauctum D 419, quod quia Divisore majus est, erit etiam novus Dividendus, cum quo iterum divisionem incipies sicut prius dicens; 4 Divisoris in 4 Dividendi D continetur semel; sed 6 non continetur semel in 1. Accipiendo ergò in unum duas postremas Dividendi figuras dicas 4 in 41 continetur ad plus novies (nequeunt enim singulæ Quotientis figuræ majores esse Digito 9) & superest 5, quod decuplò additum præcedenti Sedi 9 facit 59 in quo 6 utique continetur novies. Scribe ergo 9 in Quotiente C, & multiplicando ut supra, dicito: sexies 9 facit 54, quod subtrahi nequit à correspondente 9 Dividendi D, nec ab 19, nec ab 29, nec ab 49; subtrahitur ergo ab 59, & remanet 5 subscri-

scribendum: & dele 9 in D. Sed memento te jam suggessisse quinque decades novenario Dividendi D ad complendam, seu habilitandam subtractionem; quapropter sequens 41 acceptum in unum ut suprà minui debet quinque unitatibus, sicque evadit 36. Multiplicabis ergo quater 9, & fit 36, quo subtracto ab 36 nihil remanet, & dele 41.

B 461	A	87901
	D	419
C 1910	E	50
	F	41
	G	46

Continetur igitur 46 in 419 novies, & remanet 5 secundum Residuum, quod itidem minus semper esse debet Divisore 46 &c.

17 Similiter deleto toto Dividendo D, demitte, seu transfer figuram proximè sequentem 0 Dividendi A, eamque Residuo 5 (ut factum est suprà n. 16.) dextrorsum adnotabis, & in Dividendo A delebis; ut jam fiat secundum Residuum adauctum 50, quod erit quoque novus Dividendus E, cum quo iterum divisionem incipies sicut priùs, dicens: 4 in 5 continetur semel, & remanet 1, quod declupò additum praecedenti Sedi 0 facit 10, in quo 4 utique semel continetur. Scribe ergo 1 in Quotiente C, & per ipsum multiplicando Divisorem ut suprà, dices: semel 6 facit 6, quod à correspondente 0 subtrahi non potest, subtrahatur ergo ab 10, & remanet 4 subscribendum, & dele 0 in E. Sed memento te jam suppeditasse unam decadem zero ad complendam subtractionem; quapropter sequens 5 minui debet unitate, sicque evadit 4. Itidem prosequere operationem multiplicãdo semel 4, & fit 4, quo subducto ab 4, nihil remanet, & dele 5 in E.

Continetur igitur 46 in 50 semel, & remanet 4 tertium Residuum, quod pariter minus semper esse debet Divisore 46.

18 Et tandem deleto toto Dividendo E, demitte, seu transfer reliquam figuram proximè sequentem 1 Dividendi A, eamque Residuo 4 dextrorsum adnotabis, & in Dividendo A delebis; ut jam fiat tertium Residuum adauctum 41, quod erit novus Dividendus

F,

F, cum quo iterum eodemque modo divisionem incipies.

19 Sed quia post demissam, seu translatam figuram 1 in Residuo 4 Residuum adauctum 41 adhuc minus est Divisore 46; ideo scribatur 0 in Quotiente C, & demittatur alia sequens, si extet, Dividendi figura. Et cùm in nostro exemplo nulla extat alia Dividendi A figura demittenda, igitur hoc ultimum reliquum 41 evadit Numerator ad Fractionem. $\frac{E\ 41}{G\ 46}$ cujus Denominator erit ipse Divisor: *ut suprà in prax.* 4.*n*.6. Erit igitur præfatæ divisionis Quotiens quæsitus

C 1910 Integra cum Fractione $\frac{41}{46}$ unius Integri.

EXAMINA PRAXIUM PRÆDICTARUM.

Variis utantur modis Authores in præfatis examinandis praxibus: Quidam enim per ablationem novenarii examina construunt; alii per septenarium &c: Omnium autem celeberrimus, ac certissimus modus est; quo earum altera per sibi contrariam reciprocè comprobatur: idest Additio per Subtractionem, & Subtractio per Additionem; & similiter Multiplicatio per Divisionem, & Divisio per Multiplicationem: Quem solum hic trado.

Examen Additionis.

Ex datorum numerorum Summâ quivis eorum subtrahatur: Differentia, seu Residuum debet esse æquale Summæ reliquorum: alioquin errasse te scito.

Ut sint numeri A, B, C simul additi. Ex totali Summâ D subtrahatur eorum quivis, putà A. Dico Differentiam E æqualem esse reliquorum Summæ B C.

A	387		
B	721	B	721
C	49	C	49
D	1157	BC	770
A	387		
E	770		

Exam.

Examen Subtractionis.

Datorum numerorum Differentia addatur minori numero; Summa debet esse æqualis numero majori: alioquin errata est Subtractio. Ut sit numerus major A, à quo subtrahitur minor B. Eorum Differentia C addatur minori numero B. Dico Summam D æqualem esse debere majori numero A.

A 1473
B 958
C 515
D 1473

Examen Multiplicationis.

Datorum numerorum Productum dividatur per eorum utrumlibet: Quotiens erit æqualis alteri numero. Ut sint numeri A & B invicem multiplicati: quorum totale Productum C dividatur per eorum utrumlibet putà per B. Dico Quotientem D æqualem esse debere reliquo dato A.

A 374
B 26
2244
748
B 26 | C 9724
192
104
D 374 000

Examen Divisionis.

Quotiens datorum numerorum multiplicetur per eorum utrumlibet: Productum erit æquale alteri dato.

Ut sit numerus A divisus per numerum B. Quotiens D multiplicetur per eorum utrumlibet puta per B. Dico Productum C æqualem esse debere reliquo dato A.

B 26 | A 9724
192
104
000
D 374
B 26
2244
748
C 9724

PRA-

PRAXIS V.

De Regulâ proportionum.

1 REgula *proportionum*, vulgò Regula *Trium* dicta, est modus inveniendi ex datis tribus numeris quartum ignotum geometricè proportionalem.

2 Dicitur autem Regula *proportionum*, & Regula *Trium*: quia, cùm Proportio discontinua in quatuor ad minùs terminis consistat, & fundetur satis in tribus (ut insinuavimus supra §. 2. n. 44, & ejus *Coroll.*), docet hæc Regula, quomodo ex notis tribus quibuscumque terminis erui possit quartus ad proportionem discontinuam requisitus. Ut jam fiant quatuor termini geometricè proportionales, quorum tamen multiplex accidere solet dispositio, ut mox explicabitur.

3 Dicitur præterea Regula *aurea* propter eminentiam, qua in ignotis indagandis reliquas Arithmeticæ praxes antecellit: & ob maximam utilitatem, quam omnes ex ea analyticæ Scientiæ, cœteraque Mathemata, feliciter acquirunt universumque percipit hominum commercium.

4 Exigit autem hæc Regula, quòd duo ex tribus datis terminis semper eamdem significent *numerati* speciem, ut similiter quartus sit inde inveniendus in eâdem *numerati* specie cum reliquo ex tribus.

5 Quadrifariam proponi solet *Regula proportionum*, videlicet vel *Simplex-Directâ*, vel *Composita-Directa*, vel *Simplex-Eversa*, vel *Composita-Eversa*.

EXEMPLUM I.

Regula proportionum Simplex-Directa.

6 Regula proportionum *Simplex-Directa*, quæ præ cœteris frequentissima est in universa Mathesi, dicitur *Simplex*: quando singuli dati termini sunt simplices, non compositi ex pluribus. *Directa* autem dicitur:

quando tres dati termini eo ordine in Regulâ proponuntur, ut Primus, & Tertius semper eamdem *numerati* speciem referant, sicut pariter Quartus inveniri debeat in eâdem *numerati* specie cum Secundo; & si major, aut minor Primus fuerit Tertio, pariter major, aut minor Secundus esse debet Quarto quæsito. Eruntque geometricè, ut Primus ad Secundum, ita Tertius ad Quartum quæsitum.

7 *Præceptum*. Multiplicentur ad invicem Secundus, & Tertius: eorumque Productum dividatur per Primum: Quotiens erit Quartus quæsitus: ad quem Tertius eamdem habebit Rationem, quam Primus habet ad Secundum. Sicque evadunt quatuor termini, ut Primus scilicet ad Secundum, ita Tertius ad Quartum, geometricè proportionales.

8 Ut sint tres termini A Primus, B Secundus, & C Tertius qui quæstionem habet adjunctam: idest: Si A 8 nummi dant B 12 panni ulnas, C 36 nummi quotas dabunt? Sic notantur termini.

Nummi	Ulnæ	Nummi
A	B	C
8	12	36?
	B	12
		72
		36
E 54	D	432

Ubi vides, quod B 12 Secundus, & C 36 Tertius in se invicem ducti generant Productum D 432, quod divisum per Primum A 8 dat Quotientem E 54, qui est Quartus terminus quæsitus, ad quem Tertius C eamdem habet Rationem, quam Primus A habet ad Secundum B, videlicet subsequi alteram.

Si ergo A 8 nummi dant B 12 panni ulnas, C 36 nummi dabunt E 54 ulnas. Quod importat Regula Simplex-Directa.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Regula proportionum Composita-Directa.

9 Regula proportionum Composita-Directa differt à præcedente Simplice, quòd ibi tres tantùm proponuntur termini ad auream Regulam requisiti; in Compositâ verò plures. Dicitur ergo Regula Composita-Directa: quando tribus principalibus terminis adjuncti sunt alij minùs principales, putà qui significent tempus, damnum &c.

10 Duobus autem modis Regulæ quæsitum absolvi potest.

Primo modo: *Præceptum*. Plures illi termini ad solos tres principales adauctos reducantur, cum quibus inde procedat operatio per Simplicem-Directam.

Secundo modo: *Præceptum*. In duas Simplices Regulas propositum dividatur, & in utrâque per Simplicem-Directam quæstio resolvatur. Ut mox exempla manifestabunt.

11 Sint igitur ex. gr. quinque termini variæ denominationis A, B, C, D, E, quibus sic quæstio proponatur: A 8: operarii in spatio B 15 dierum ædificant Turrim C 50 passus altam: quæritur, quam altam ædificabunt D. 12 operarii in spatio E 20 dierum?

operarii	dies	passus	oper.	dies
A	B	C	D	E
8	15	50	12	20

A 8 D 12

H 120 I 240

C 50

F 100 L 12000

8 Ubi vides, quod termini minùs principales sunt B, & E, qui tempus significant. Quapropter si primo modo illos addideris suis principalibus A, & D: hoc est, Si ex B, & A per multiplicationem fiat unus terminus principalis H; sicut pariter ex D, & E per multiplicatiouem fiat alter principalis I; jam erunt tres soli termini H Primus, C Secundus, & I. Tertius ad Regulam requisiti: quam

exinde persolve, veluti Simplicem-Directam in præcedente exemplo. Hoc est

12 Primo modo multiplicentur ad invicem A numerus 8 operariorum, & B numerus 15 dierum, ut fiat Primus terminus principalis H labor scilicet diurnus 120 operariorum. Et similiter multiplicentur ad invicem D numerus 12 operariorum, & E numerus 20 dierum, ut fiat Tertius terminus principalis I labor scilicet diurnus 240 operariorum. Tunc sic per Simplicem-Directam. Si H 120 operæ diurnæ dant Turrim altam C 50 passus, I 240 operæ diurnæ, quam altam dabunt? Ducatur Secundus terminus C in Tertium I, & eorum Productum L dividatur per Primum H, ut vides factum; Quotiens F erit Quartus terminus quæsitus.

13 Vel secundo modo idem propositum duplici Regulâ Simplice-Directâ resolvatur sic: Primo si A 8 operarii conficiunt C passus 50; D 12 operarii conficient M passus 75: subintellige in eodem spatio B 15 dierum. Tum secundò: Si B 15 dies dant M passus 75; E 20 dies dabunt F 100 passus quæsitos ut supra.

operar.	pass.	operar.	dies	pass.	dies
A	C	D	B	M	E
8	50	12?	15	75	20?
	C	50		M	75
		600			100
	M	75		140	
			F 100.	1500	

Jam ergo si A 8 operarii in spatio B 15 dierum absolvunt Turrim C 50 passus altam, D 12 operarii in spatio E 20 dierum absolvent altam F 100 passus.

EXEMPLUM III.

Regula proportionum Simplex-Eversa.

14 In præcedentibus exemplis Regulæ proportionum Simplicis-Directæ, & Compositæ-Directæ quatuor

tuor termini proportionales ita comparantur, ut si major, aut minor Primus fuerit Tertio, major quoque, aut minor Secundus esse debet Quarto: unde sicut se habet Primus ad Secundum, ita Tertius habere se debet ad Quartum quæsitum. In Regulâ verò Simplice-Eversâ non sic. Dicitur enim Regula proportionum Simplex-Eversa: quando tres termini simplices ita comparantur, ut quò Primus major fuerit Tertio, eò Secundus minor esse debeat Quarto. Vel quò Primus minor Tertio, eò Secundus major Quarto; sit ergo unicum.

15 *Præceptum*. Multiplicentur Primus, & Secundus ad invicem: & eorum Productum dividatur per Tertium: Quotiens enim erit Quartus quæsitus. Vel si tres termini A, B, C inverso ordine comparentur, quòd scilicet C Tertius ponatur primo loco, & Primus A tertio: jam erunt inversâ Ratione, ut Tertius ad Secundum, ita Primus ad quæsitum. Quare tunc operationem institue juxta præceptum *Exempli I.* per Simplicem-Directam.

16 Ut sint tres termini simplices A, B, C, quibus sic Regula Eversa proponatur. Si A 4 operarii ædificant Turrim spatio B 15 dierum, C 12 operarii, in quot diebus ipsam absolvent? Ubi satis suadetur, quòd quantò major fuerit numerus operariorum, tantò minor exigit esse numerus dierum pro eâdem Turri absolvendâ.

Multiplicentur ergo priores termini A, & B ad invicem, & fiat Productum E, quod dividatur per Tertium C: Quotiens D erit Quartus quæsitus.

operar.	dies	operar.
A	B	C
4	15	12
A	4	
E	60	D 5
	00	

Ita quòd si A 4 operarii absolvant Turrim spatio B 15 dierum: plures operarii nempè C 12 in minore spatio absolvent; nempe D 5 dierum.

EXEM-

EXEMPLUM IV.

Regula proportionum Composita-Eversa.

17 Discrimen inter hanc Regulam, & præcedentem Eversam haud dissimile est ei, quod interesse diximus Regulis Directis in prioribus Exemplis. Differt enim Eversa-Simplex in hoc ab Eversâ-Compositâ, quòd hæc præter tres principales terminos ad auream Regulam requisitos, alios quoque minùs principales includit, & accessorios. Quare simile

18 *Præceptum* sit. Propositum in duas dividatur Regulas, duæque instituantur operationes Directa scilicet, & Eversa.

19 Ut sint plures termini A, B, C, D, E, quibus sic Regulæ Compositæ-Eversæ quæstio proponatur. Si A 300 Nummi sufficiunt B 40 Militibus pro stipendio C 30 dierum: quæritur: D 600 Nummi E 70 militibus quot dierū erunt pro stipendio?

Numm.	milit.	dies	numm.	milit.
A	B	C	D	E
300	40	30	600	50?

Prima operatio Directa.

A	C	B	D
300	30	40	600?
		B	40
H 80 milit.		G	24000

Secunda operatio Eversa.

H	D	C	E
80	600	30	50?
	H	80	
F 48 dies:	I	2400	

Dividatur propositum in duas Regulas quarū. Prima sit. Si A 300 nummi pro stipēdio sufficiunt B 40 militibus: D 600 nummi quot militibus sufficiēt? Subintellige in eodem tempore C 30 dierum. Quare per Simplicem-Directam multiplicatis ad invicem posterioribus terminis B, & D, eorum Productum G dividatur per primum A, erit Quotiens H 80 milites, quibus eodem spatio C 30 dierum sufficient D 600 num-

nummi. Ita quod si spatio C 30 dierum A 300 nummi sufficiunt B 40 militibus: sub eodem spatio D 600 nummi sufficient H 80 militibus. Deinde

Secunda instituatur sic. Si H 80 militibus sufficiunt D 600 nummi pro stipendio C 30 dierum: E 50 militibus eadem summa D, quot dierum stipendiũ erit? Ubi vides, quò minor fuerit numerus militum, eò pluribus diebus eadem summa sufficiet. Quare per Simplicem-Eversam multiplicentur ad invicem priores termini H, & C, eorumque Productum I dividatur per Tertium E, invenies optatum Quotientem F 48 dies.

Jam si ergo A 300 nummi sunt B 40 militibus stipendium C 30 dierum: D 600 nummi erunt E 50 militibus stipendium F 48 dierum.

APPENDIX

De numeris fractis.

1 Numerus *fractus*, seu *fractio* (ut suprà diximus n. 32. hujus §.) nihil aliud est nisi aliqua, aut plures partes unius Integri: hoc est, *acceptio unius, vel plurium partium æqualium*, in quas Integer divisus intelligitur.

2 Fractionem quoque, diximus, dividi *in abstractam*, & *concretam*.

De fractione abstractâ.

3 Fractio *abstracta* (ut subdimus ibidem) duobus notatur terminis *verticaliter* positis lineolâ interductâ; Quorum inferior vocatur Denominator, quia denominat speciem partium æqualium, in quas Integer divisus intelligitur: videlicet an sint secundæ, tertiæ, quartæ, sextæ, nonæ, &c: hoc est, quòd Integer, cujus est Fractio, dividatur in duas, aut tres, aut quatuor, aut sex, aut novem, &c. partes æquales; Superior verò dicitur Numerator, quia numerat, seu indicat, quot partes accipiantur unius Integri in eas æquales divisi, quas specificat suis unitatibus Denominator. Ut Fra-

ctio

ctio $\frac{2}{3}$ significat duas tertias partes unius Integri: hoc est: quòd ex uno Integro in 3 partes æquales, pro ut importat Denominator 3, diviso, accipiuntur tantùm 2, pro ut indicat Numerator 2. Similiter Fractio $\frac{1}{2}$ significat unam secundam partem, seu dimidium, unius Integri: hoc est: quòd ex uno Integro in 2 partes æquales diviso, una tantùm accipitur, idest dimidium. Et similiter Fractio $\frac{10}{26}$ significat decem vigesimas sextas partes unius Integri: hoc est: quòd ex uno Integro in 26 partes æquales, pro ut importat Denominator 26, diviso, accipiuntur tantùm 10, pro ut indicat Numerator 10.

4 Hinc est, quod nonnulla remanent explicanda de Fractionum Valore, Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Divisione, ne videamur necessariis deficere.

De Valore Fractionum.

5 Valorem sumit Fractio ab utroque suo termino, Numeratore scilicet, & Denominatore.

6 Quando ergo Numerator minor est suo Denominatore; tunc Fractio minor est Integro, cujus est Fractio. Ut $\frac{2}{3}$ duæ scilicet tertiæ partes unius Integri minùs valent, quàm totus Integer in tres partes divisus. Diciturq; tunc *propriè Fractio*. Etenim Fractio nata est ad significandum aliquid minus integrâ unitate.

7 Quando autem Numerator æqualis est suo Denominatori; tunc Fractio æquivalet uni Integro. Ut in Fractione $\frac{5}{5}$, cùm significetur, ex Integro in 5 partes æquales diviso, accipiendas esse 5 partes, manife-

stum

ctum est accipi simul omnes partes, ex quibus Integrum componi denominatur, & consequenter accipi semel totum Integrum, juxta verum illud: *Omnes partes simul sumptæ adæquant Totum*. Sicque Fractiones $\frac{20}{20}$, $\frac{100}{100}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{70}{70}$ &c. singulæ adæquant totum Integrum; Quare non dicuntur verè, & propriè Fractiones, sed *impropriè*.

8 Quando verò Numerator major est suo Denominatore; tunc Fractio plùs valet, quàm unitas Integra. Ut in Fractione $\frac{7}{4}$, cùm significentur septem quartæ partes unius Integri, satis ostenditur, semel accipi totum Integrum in 4 æquales partes divisum, & insuper tres ejus quartas partes. Sicque Fractiones $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{40}{20}$ &c. singulæ majores sunt uno Integro, quapropter nec dicuntur verè, & propriè Fractiones, sed *impropriè*.

9 Fractionum igitur eam aliâ dicimus esse majorem; non quæ magis fractum denominat Integrum, cujus est Fractio, seu in plures divisum partes, quàm denotaverit alia Fractio ejusdem Integri: hoc enim pacto Fractio $\frac{2}{4}$ major esset, quàm $\frac{2}{3}$: cùm prior denominet Integrum in plures divisum partes, nempe 4, quàm posterior, nempè in 3; benè verò ea major dicitur Fractio, quæ majus fractum importat, quæ scilicet majorem partem, aut partes enumerat unius Integri, seu quæ magis accedit ad suum Integrum, cujus est Fractio, ac tandem cujus Numerator majorem habet Rationem ad suum Denominatorem, quàm habuerit alterius Numerator ad suum Denominatorem. Ut Fractio $\frac{2}{3}$ major est Fractione $\frac{5}{8}$: quia major pars accipitur unius Integri, cùm ex illo in 3 partes æquales diviso

numerantur solùm 2 partes, quàm si ex eodem in 8 æquales partes diviso enumerentur 5 partes; plus enim sunt duæ tertiæ partes, quàm quinque octavæ ejusdem Integri: majorem quippe Rationem habet Numerator 2 ad suum Denominatorem 3, quàm Numerator 5 habet ad suum Denominatorem 8. Ita quòd verùm sit, Fractionem propriè dictam aliâ dici majorem, quò major fuerit ejus terminorum Ratio.

10 Majoritas autem unius Fractionis supra aliam faciliùs cognoscetur à signo. Si enim duarum Fractionum termini decussatim multiplicentur, Numerator scilicet unius cùm Denominatore alterius, ut novi producantur Numeratores, respectivè suis generantibus Numeratoribus subscribendi; jam horum major majorem denotabit Fractionem suprapositam. Ut Fractio AB major dicitur esse Fractione CD à signo; quòd multiplicato Numeratore A per Denominatorem D producitur alius Numerator E subscribendus (ut vides) suo Numeratori generanti A: & similiter multiplicato Numeratore C per Denominatorem B producitur alius Numerator F pariter subscribendus suo Numeratori generanti C. Quò igitur novus Numerator E resultaverit major novo Numeratore F, eò major erit Fractio AB superstans Producto E, Fractione CD superstante Producto F.

A	2	X	5	C
B	3		8	D
E	16		15	F

Coroll. Fractiones, quarum Numeratores eandem habent ad suos Denominatores Rationem, sunt æquales. Sicque Fractiones AB, CD, EF sunt æquales; eadem enim est Ratio A ad B, quæ est C ad D, & quæ est E ad F, nempe subdupla. Et similiter Fractiones GH, IK, LM sunt etiam æquales: nam eadem est Ratio G ad H, ac I ad K, & L ad M nempè subsesquialtera.

A	1	C	6	E	10
B	2	D	12	F	20
G	2	I	8	L	20
H	3	K	12	M	30

Digressio

De Majoritate Rationum.

HAud incongruum quidem puto, pauca de Majoritate, aut Minoritate Rationum breviter hic resumere, quæ dicta sunt *suprà* §. 2. *n.* 32. 33. & 34. ut commodiùs fiat Tyroni monitum pro rectâ illorum, & sequentium intelligentiâ. Majorem aliâ, plerique docent, esse Rationem, quando Antecedens unius pluries partem aliquotam continet sui Consequentis, quàm Antecedens alterius Rationis contineat similem partem aliquotam sui Consequentis. Et hoc semper verificatur in omnibus Rationibus tum *majoris*, tum *minoris inæqualitatis* (suprà n. 12. & 13. §. 2.) tum promiscuè, tum singillatim comparatis. Ut in Rationibus simul *minoris inæqualitatis*, A ad B, & C ad D: Majorem Rationem geometricam habere dicitur A 2 ad B 3, quàm C 5 ad D 8: quia Antecedens 2 bis continet præcisè tertiam partem sui Consequentis 3, quæ est 1, bis enim 1 adæquat 2; Antecedens verò 5 non bis continet, sed semel, tertiam partem sui Consequentis 8, quæ est

A	B	C	D
2.	3.	5.	8

$2\frac{2}{3}$: bis enim $2\frac{2}{3}$ faciunt $5\frac{1}{3}$, quod non continetur in 5. Ergo major est Ratio 2 ad 3, quàm 5 ad 8. Similiter in Rationibus simul *majoris inæqualitatis* E ad F, & G ad H: quia Antecedens 9 ter continet præcisè dimidium sui Consequentis 6, quod est 3; sed Antecedens 4 non ter, sed bis continet dimidium sui Consequentis 3, quod

E	F	G	H
9.	6.	4.	3

est $1\frac{1}{2}$: ter enim $1\frac{1}{2}$ faciunt $4\frac{1}{2}$, quod non continetur in 4. Ideò major est Ratio 9 ad 6, quàm 4 ad 3. Sicque attentatio continentiæ, quæ fit similis partis aliquotæ singulorum Consequentium in suis

Antecedentibus, constanter decernit Majoritatem, aut Minoritatem, quam habet una Ratio supra aliam, sive *majoris*, sive *minoris inæqualitatis* sint Rationes.

Putant autem alii, Rationem esse Ratione majorem: *cùm minor Terminus primæ Rationis* (ait clarus Fardella) *plures partes Termini majoris continet, seu plus ad suum Totum accedit, quàm sit Terminus minor secundæ Rationis respectu Termini majoris*: quo pacto „ 4 ad 8 dicitur habere majorem Rationem, quam 2 ad 6, quia 4 plures partes numeri 8 continet, seu plus accedit ad 8, quam numerus 2 ad 6, „ cujus pauciores partes involvit. Sed hoc tantùm verificatur in Rationibus simul *minoris inæqualitatis* A ad B, & C ad D, ut vidimus in exemplo ab eodem allato, ubi scilicet quia minor Terminus A 4 in primâ Ratione plures utique partes Termini majoris B 8 continet, duas nempe ejus quartas partes, quam minor Terminus C 2 in secundâ Ratione respectu majoris Termini D 6: duæ enim quartæ partes Termini 6 sunt 2 cum duabus tertiis, quæ non continentur in Termino 2; ideo verè dicitur A ad B majorem habere Rationem, quàm C ad D. Attamen hoc non verificatur in Rationibus *majoris inæqualitatis*. Ut patet in eodem exemplo, terminis dumtaxat inversis: Minor enim est Ratio B 8 ad A 4, quam D 6 ad C 2; hæc enim est tripla illa dupla.

A	B	C	D
4.	8.	2.	6.

B	A	D	C
8.	4.	6.	2.

Sunt præterea nonnulli, qui Majoritatem unius Rationis supra aliam ex eo inferunt, quò *differentia* terminorum unius Rationis fuerit major *pars*, aut *partes* utriuslibet termini, quàm *differentia* terminorum alterius Rationis fuerit *pars*, aut *partes* similis termini. Ut in Rationibus E ad F, & G ad H, quia differentia inter 9 & 6, nempe 3, quæ est dimidium Consequentis 6, vel tertia pars Antecedentis 9, major quidem pars est sui Consequentis, aut Antecedentis, quàm sit differentia inter 4 & 3, nempe 1, quæ est tertia pars Consequentis 3, vel quarta pars Antecedentis 4 (major quippe pars est dimidia, quam tertia, & major tertia, quam quarta); ideo major utique dicitur esse Ratio E ad F, quàm G

E	F	G	H
9.	6.	4.	3

At hoc solùm verificatur in Rationibus *majoris inæqualitatis*, ut constat in exemplo; non verò in Rationibus *minoris inæqualitatis*, ut patet in eodem exemplo terminis inversis. Minor enim est Ratio F 6 ad E 9, quàm Ratio H 3 ad G 4, quia Antecedens 3 propriè continet tres quartas partes sui Consequentis 4, id est 3; at Antecedens continere non valet tres quartas partes sui Consequentis 9, nempe $6\frac{3}{4}$.

F E H G
6. 9. 3. 4.

Coroll. I. Ratio *majoris inæqualitatis* semper major est Ratione *minoris inæqualitatis*. Siquidem Ratio *excessûs* semper est major Ratione *defectûs*.

Coroll. II. Ratio *majoris inæqualitatis*, si invertatur, evadit *minoris inæqualitatis* Ratio, & è converso. Si enim termini A, B invertantur, ut qui prior est fiat posterior, jam Ratio A ad B *majoris inæqualitatis* conversa est in Rationem B ad A *minoris inæqualitatis*.

A B
8. 6.
B A
6. 8.

Coroll. III. Rationes simul *majoris*, vel simul *minoris inæqualitatis*, cùm invertuntur, ea, quæ in prima terminorum comparatione major illis fuerat, in inversa postmodum eorumdem comparatione evadit illa minor; ut in Rationibus simul *majoris inæqualitatis*, quia Ratio A ad B major est Ratione C ad D, cùm invertuntur postea Rationes, erit B ad A minor, quàm D ad C. Et similiter in Rationibus simul *minoris inæqualitatis*, quia Ratio F ad E major est Ratione G ad H, postea cùm invertuntur Rationes, erit F ad E minor Ratio, quàm H ad G.

A B C D
9. 6. 4. 3.
E F G H
4. 8. 2. 6.

Coroll. IV. Si duarum Rationum Antecedentes accipiantur pro Numeratoribus, & Consequentes pro Denominatoribus, jam Rationes evadunt Fractiones, sive propriè, sive impropriè dictæ, quo pacto poteris, utra earum major sit, facilè dignoscere ex iis, quæ docuimus *suprà* [illegible].

Occurrit hîc etiam animadvertendum, quod ab Euclide *def.* 5. 6. docuimus *suprà* [illegible], ex continua positione terminorum, Rationem extremorum *componi* seu *constare* ex Rationibus intermediis, & [illegible]

non

non semper inferri: ergo Ratio ex Rationibus constans major esse debet: qualibet ingrediente seu componente Ratione, maximè quia *Totum est sua parte majus*. Hujusmodi enim *compositio* non est verè, & propriè dicenda compositio tanquam ex positivis partibus simul addendis perpetranda, de qua semper verificari solet, totum compositum esse qualibet suâ parte majus. Sed potius est accipienda veluti quædam *resultatio* ex pluriū *comparatione*, ubi *resultans* aliquando majus, aliquando minus ingrediente consequitur.

Hujus autem exemplum habemus in vulgari rerum Multiplicatione, & Divisione. Etenim cùm ad invicem multiplicentur duo termini, qui vel simul *excessum* seu positivam important quantitatem, vel simul *defectum* seu defectivam, aut negativam exprimunt quantitatē, utique ex *comparatione* seu *compositione* Multiplicandi cum Multiplicatore resultat Productum vel majus in *excessu*, ut vidimus in Multiplicatione Integrorum *suprà* §.3. *prax*.3., vel majus in *defectu* seu magis defectivum, ut videbimus in Multiplicatione Fractionum, quolibet ingrediente termino. At ubi post Multiplicationem supervenit Divisio, jam quod productum fuerat per Multiplicationem, sive in *excessu*, sive in *defectu*, minuitur per Divisionem, evaditque Quotiens minor Dividendo, sive minor in *excessu*, ut vidimus in Divisione Integrorum *suprà* §.3. *prax*.4. sive minor in *defectu*, seu minus defectivus, ut videbimus in Divisione Fractionum.

Ita in hujusmodi *compositione* quando Rationes componentes fuerint omnes simul *majoris inæqualitatis*, seu Rationes *excessivæ*: tunc equidem Ratio ex iis constans resultat absolutè major qualibet ingrediente seu componente Ratione, utpotè quia ejus Denominator, cùm resultare debeat ex multiplicatione Denominatorum Rationum *excessivæ*, quæ *positivam* exprimunt quantitatem, majorem utique *excessum* importabit, nō defectum: quod est esse majus absolutè. Ut Ratio extremorum sextupla A ad C, quæ *componi* seu *constare* dicitur ex Rationibus *excessivis* A ad B duplā, & B ad C
A B C
18. 9. 3
triplâ simul *majoris inæqualitatis*, profectò major est, ut vides, qualibet componente Ratione: maximè quia

ejus

ejus Denominator, 6, cùm oriatur ex multiplicatione Denominatorum *excessûs*, 2 per 3, fit propterea major per *excessum*, adeoque denominat compositam Rationem extremorum absolutè majorem singulis componentibus.

Et vice versâ quando Rationes *compositionem* hujusmodi ingredientes fuerint omnes simul *minoris inæqualitatis*, seu Rationes *defectûs*; tunc perspicuum est, Rationem ex iis compositam resultare magis defectivam, proindeque minorem qualibet ingrediente Ratione: maximè quia ejus Denominator resultare debet ex multiplicatione Denominatorum Rationum *defectûs*, quæ, cùm *negativam* affectent quantitatem, majorem producunt defectum, qui minorem absolutè quantitatem importat. Ut Ratio subduodecupla E ad G, quæ componi dicitur ex Rationibus *defectûs* E ad F subquadruplâ, & F ad G subtriplâ, simul *minoris inæqualitatis*, minor utique est qualibet componente Ratione, utpotè quia ejus Denominator 12, cùm resultet ex multiplicatione Denominatorum *defectûs*, 3 per 4, producitur major in defectu, adeoque Rationem extremorum denominat magis defectivam, seu revera minorem, singulis componentibus. E F G 2, 8. 24.

At ubi fuerint ingredientes Rationes promiscuè *majoris, & minoris inæqualitatis*: tunc Ratio ex iis constans nonnunquam resultabit aliquâ componente seu ingrediente Ratione minor, aut æqualis; maximè quia ubi intercideritt *diversæ inæqualitatis* Ratio, ibi nulla est facienda Denominatorum multiplicatio, benè verò divisio (ut satis dictum est *suprà* §. 2. n. 46.) Sicque id quod per Multiplicationem productum fuerat, sive in *excessu*, sive in *defectu*, in comparatione Rationum simul *majoris*, vel simul *minoris inæqualitatis*, [illegible] minuitur per Divisionem in comparatione Rationum, quarum una sit *minoris*, altera *majoris inæqualitatis*: hoc est, quod *majus* fuerat in *excessu*, superveniente Divisione fit *minus* in *excessu*, quod est propriè fieri minus; & quod *majus* fuerat in *defectu*, adveniente Divisione fit *minus defectivum*, quod revera est fieri majus. Ut Ratio extremorum quadrupla H ad M, quæ componi seu constare dicitur ex promiscuis Rationibus

excessûs, & defectûs; H ad I dupla, I ad L quadrupla, sive majoris inæqualitatis; & L ad M subdupla, scilicet minoris inæqualitatis; non tamen quælibet ingrediens; sed æqualis est Rationi componenti; maximè quia ejus Denominator 4 nõ resultat ex solâ intermediorum multi-

H I L M
16. 8. 2. 4.

plicatione, sive simul per excessum, sive simul per defectum, ut in præcedentibus; sed ex Multiplicatione simulque & Divisione. Ubi enim post compositam Rationem excessûs, octuplam H ad L, majoris scilicet inæqualitatis immediatè succedat Ratio defectûs subdupla L ad M minoris scilicet inæqualitatis; tunc Denominator excessûs 8, qui productus erat per Denominatorum 2 & 4 multiplicationem in Rationibus H ad I, & I ad L, simul excessûs, minui debet per divisionem, quæ fit inter Denominatores 8 per 2 Rationum scilicet H ad L & L ad M diversæ inæqualitatis (ut docuimus supra in 46.) Sic resultat Quotiens 4 Denominator compositæ Rationis extremorum quadruplæ H ad M, nimi-

E F G
2. 8. 24.

rum componentis, nempe H ad L æqualis. Non igitur nisi si Ratio extremorum, quæ componi dicitur ex intermediis [illegible] Ratione [illegible] Digressionis satis.

Sequuntur quædam [illegible]

[illegible] Ratio ex iis con- [illegible] componente [illegible]

Dicitur [illegible] quantitas, quæ pars quævis aliquota est [illegible] Numerorum 8 [illegible] præcisè [illegible] sumpta præcisè adæquat [illegible] Sic quæ saltem unitas semper est omnium numerorum *communis mensura*. *Maxima* verò *communis mensura* duorum numerorum dicitur ille numerus, quo major [illegible] nullus est qui sit *communis* [illegible] *mensura*. [illegible] Numerorum A & B præter multas alias [illegible] *mensura* est C. Nam C quindecies sumptum præcisè adæquat A, & duodecies sumptum præcisè adæquat B. Datur [illegible] major *mensura*

A	B
30.	24.
C	2
D	3
E	6

ſura D; ſicut enim D decies ſumptum præciſè menſurat A, ita octies ſumptum præciſè menſurat B. Et tandem datur *maxima communis* eorumdem *menſura* E; quæ ſcilicet quinquies ſumpta præciſè adæquat A; & quater ſumpta præciſè adæquat B; nec alia major eâ inveniri poteſt quantitas, quæ *communis* ſit utriuſque *menſura*. Ut autem *maxima* hæc *communis menſura* facilè inveniatur hoc habeto.

3 *Præceptum*. Terminus, ſeu numerus major dividatur per minorem; jam ſi nullum eſt Reliquum, Diviſor ipſe erit *maxima communis menſura* utriuſque. Si verò in Diviſione Reliquum ſuperfuerit: hoc aſſumatur in novum Diviſorem, per quem dividatur præcedentis diviſionis Diviſor. Et ſic deinceps repetantur hujuſmodi diviſiones, donec Zerus pro Reliquo remaneat, nullâ habitâ curâ de Quotientibus; hujus enim ultimæ diviſionis Diviſor erit *maxima communis menſura* quæſita, quæ ſi fuerit unitas: ſignum eſt, datos numeros eſſe *inter ſe primos* (ſuprà §. 1. n. 13.) ſi verò fuerit unitate major: dico datos numeros eſſe *inter ſe compoſitos* (ibidem n. 14.)

4 Sint igitur duo numeri, A minor, B major, quorum quæritur *maxima communis menſura*. Dividatur B per A, Reliquum erit C, nullâ habitâ curâ de Quotiente 1. Deinde

A B
366) 480 (1
C 114) 366 (3
D 24) 114 (4
E 18) 24 (1
F 6) 18 (3

A
C
D
E

terminus A, qui fuit Diviſor in præcedente diviſione, dividatur per Reliquum C, & (neglecto Quotiente 3) remanebit in hac ſecundâ diviſione Reliquum D. Similiter terminus C, qui Diviſor fuerat in præcedente diviſione, dividatur per Reliquum D, & (prætermiſſo Quotiente 4) remanebit in tertiâ diviſione Reliquum E. Rurſus præcedens Diviſor D pariter

 divi-

dividatur per Reliquum E, ut fiat in quartâ divisione (dimisso Quotiente 1) Reliquum F. Et tandem dividatur præcedens Divisor E per hoc Reliquum F, & resultabit, ut vides (neglecto Quotiente 3) pro ultimo Reliquo Zerus. Dico ergo, hujus ultimæ divisionis Divisorem F esse *maximam communem mensuram* terminorum A & B.

5 Vel si datis terminis G & H, factâ divisione majoris per minorem, resultaverit, ut vides, pro Reliquo Zerus: signum erit, quod ipse Divisor G erit maxima communis mensura datorum. Etenim G semel sumptum præcisè sibi ipsi adæquat, & quinquies sumptum præcisè adæquat H.

G	H
12)	60 (5
	00

PRAXIS VII.

Fractionem ad minimos terminos reducere.

1 Quoniam Fractionis termini quò majores fuerint, eò minùs nobis ejus explicant valorem: docetur hac praxi, istam ad *minimos* (quò fieri potest) *terminos* revocare. Siquidem Fractionis A B valor primo intuitu obscurior nobis videtur, quàm fuerit Fractio C D, hoc est dimidium unius Integri; & tamen A B idem valet, ac C D.

A	143	C	1
B	286	D	2

2 *Præceptum* I. Inveniatur terminorum *maxima communis mensura* (per præced.): & per eam singuli dividantur Fractionis termini: Quotientes enim erunt termini novæ, & æquivalentis Fractionis ad *minimos* redactæ *terminos*.

3 Ut si Fractionem A B ad *minimos* volueris *terminos* revocare: Quære primum *maximam* terminorum *communem mensuram* (per præced.), quæ sit F. Deinde per hanc mensuram F dividatur Numerator A, & Denominator B, ut fiant novi Numerator C, & Denominator

A	366			C	61
		F	6		
B	480			D	80

nator D. Erit ergo Fractio A B ad minimos reducta terminos C D: idem enim valet A B, quàm C D.

4 Similiter sit Fractio G H ad minimos terminos reducenda. *Maxima* terminorum G & H *communis mensura* est ipsum G, ut vidimus suprà. Quare divisis terminis G & H per G, resultabunt novi termini L & M, Numerator scilicet & Denominator Fractionis L M: quæ sub minimis terminis eumdem profectò exprimit valorem, quem habet Fractio G H: Eadem enim est Ratio G ad H, quæ est L ad M.

G 12 | G 12 | L 1
H 60 | | M 5

Coroll. Fractio, cujus termini sint numeri *inter se primi*, non potest ad minores reduci terminos, sed in ijsdem sistet, quibus proponitur. Ut Fractio E F non potest ad minores terminos reduci, quia 15 & 22 sunt numeri *inter se primi*, non enim habent aliam *communem mensuram* præter unitatem. Fractio verò, cujus termini sint *inter se compositi*, potest quidem ad minores, & minimos terminos reduci. Nam cùm Fractionis E G termini sint *inter se compositi*, habent *communem mensuram* unitate majorem nempè 3, adeòque Fra-

E 15 / F 22

E 15 | H 5
G 21 | I 7

Fractio $\frac{15}{21}$ est ad minimos terminos reducibilis nempè ad $\frac{5}{7}$.

PRAXIS VIII.

Duas, aut plures Fractiones ad eamdem denominationem reducere.

1 Sint primò duæ Fractiones diversæ Denominationis reducendæ ad duas alias, quæ eundem habeant Denominatorem, & primis æquivaleant.

2 *Præceptum.* Numerator unius Fractionis multiplicetur decussatim per Denominatorem alterius, ut producantur novi Numeratores, qui correspondenter suis primitivis verticaliter subscribantur. Deinde De-

nominatores in se invicem ducantur, ut producatur novus Denominator, utrique novo subscribendus Numeratori. jamque erunt novæ Fractiones eamdem habentes denominationem, & correspondenter suis superioribus æquales.

3 Sint verbi gratia: duæ Fractiones A B, C D diversæ denominationis: prior scilicet, quæ octavas, posterior verò, quæ tertias denominet partes. Numerator A, multiplicans decussatim Denominatorem D, producit novum Numeratorem E suo primitivo A subscribendum. Et pari modo Numerator C, multiplicans decussatim Denominatorem B, producit novum Numeratorem G suo primitivo C subscribendū. Et tandem Denominatores B & D inter se multiplicati producunt novum Denominatorem F subscribendum (lineolâ interpositâ) utrique novo Numeratori E & G. Erunt igitur novæ Fractiones E F, G F, datis Fractionibus A B, C D, singulæ singulis æquivalentes, atq; ad eamdem denominationem F reductæ.

A	5		2	C
B	8	X	3	D
E	15		16	G
F	24		24	F

4 Si verò tres fuerint Fractiones ad eamdem denominationem reducendæ, hæc tria habeto præcepta.

5 *Præceptum I.* Reducantur duæ priores modo supradicto. Tum pro reductione tertiæ Fractionis, oportet & illas jam reductas iterum ad alias æquivalentes, ac eamdem habentes denominationem, reducere, juxta reliqua præcepta.

6 *Præceptum II.* Denominator tertiæ Fractionis multiplicetur per singulos Numeratores reductarum, ut producantur novissimi earumdem Numeratores, singuli correspondenter singulis generantibus subscribendi. At ejus Numerator multiplicetur per reductarum Denominatorem, ut producatur novus tertiæ Fractionis propositæ Numerator.

7 *Præceptum III.* Et tandem idem Denominator datæ tertiæ Fractionis multiplicetur per eumdem reductarum Denominatorem, ut producatur novissimus Denominator singulis tribus novissimis Numeratoribus subscribendus. Jam erunt tres novissimæ Fractio-

nes

nes eamdem habentes denominationem, atque tribus propositis Fractionibus singulæ singulis æquivalentes.

8. Haud dissimili compositione procedatur, si plures quàm tres fuerint Fractiones ad eamdem denominationem reducendæ.

9. Sint igitur ex: gr: tres Fractiones A B, C D, H I ad eamdem reducendæ denominationem. In primis reducatur priores duæ A B, C D modo suprà tradito ad æquivalentes Fractiones E F, G F. Secundò Denominator I tertiæ Fractionis multiplicans reductarum Numeratores E & G producit novissimos Numeratores L & M; At ejus Numerator H multiplicans reductarum Denominatorem F producit tertium Numeratorem N. Et tandem Denominator I tertiæ Fractionis multiplicans eundem Denominatorem F producit novissimum Denominatorem P, qui sub singulis tribus novissimis Numeratoribus L, M, N est notandus, ut fiant tres novissimæ Fractiones L P, M P, N P, eamdem, ut vides, habentes denominationem P, quas dico singulas singulis propositis A B, C D, H I æquivalere.

A $\frac{5}{8}$ B	X	C $\frac{2}{3}$ D	H $\frac{3}{4}$ I
E $\frac{15}{24}$ F		G $\frac{16}{24}$ F	
L $\frac{60}{96}$ P		M $\frac{64}{96}$ P	N $\frac{72}{96}$ P

PRAXIS IX.

Fractionem Fractionis ad simplicem Fractionem ipsi æqualem reducere.

1 PRæter Integri Fractionem est adhuc Fractionis Fractio, seu Minutia Minutiæ: hoc est non solùm *integra* unitas habet dividi in partes aliquotas, quas Fractio denominat; verùm etiam aliquando Fractio ipsa dividi habet in partes aliquotas, quas denominat alia Fractio. Ut si proponantur tres quartæ partes quinque octavarum: videlicet quòd unum Integrum in octo partes æquales sit divisum; ex quibus, tantùm

quin-

quinque enumerantur: attamen hæc quantitas quinque octavarū ultimò divisa intelligatur in quatuor aliquotas partes, ex quibus tandem tres solæ hîc accipiuntur; quæritur ideo: hæ tres quartæ partes quinque octavarum quænam *pars*, aut *partes* erunt ipsius Integri? ut fiat ejusdem Integri propriè dicta Fractio æqualis datæ Fractioni Fractionis.

2 *Præceptum.* Multiplicentur inter se utriusque Fractionis Numeratores, ut fiat novus Numerator: Et similiter multiplicentur inter se earumdem Denominatores, ut fiat novus Denominator: Sicq; consurget nova Fractio simplex, quæ se habebit ad Integrum, sicut data Fractio Fractionis ad ipsum Integrum.

3 Sit ex: gr: Fractio C D Fractionis A B reducenda ad simplicem Fractionem ipsi æqualem. Numeratores A & C inter se multiplicati producunt novum Numeratorem E. Item Denominatores B & D inter se multiplicati producunt novum Denominatorem F. Dico Fractionem C D Fractionis A B reductam esse ad simplicem Fractionem E F ipsi æqualem, quæ scilicet eadem pars erit unius Integri, quàm fuerit data Fractio C D Fractionis A B respectu ejusdem Integri: quod est se habere ad Integrum, sicut data Fractio Fractionis se habet ad ipsum Integrum.

A $\frac{1}{2}$ B C $\frac{5}{6}$ D

E $\frac{5}{12}$ F

PRAXIS X.

Fractionem impropriè dictam, idest Integro majorem, aut æqualem, ad propriè dictam reducere.

1 Cum Fractio *impropriè dicta* sit, vel Integro major, aut æqualis (ut insinuavimus supra in appendice n. 7.), eam profectò ad *propriè dictam* Fractionem reducimus, si abeâ Integrum, cujus est Fractio, subducamus, donec aut aliquid minus Integro remaneat, aut nihil: Si enim nihil: signum erit Fractionem, Integro, vel Integris præcisè æquare, sicque Fractionem

nem in Integrum abire; Si verò aliquid: hoc erit Fractio *propriè dicta*, quæ cum Integro, vel Integris subductis æquivalebit datæ Fractioni *impropriè dicta*.

2 *Præceptum*. Numerator dividatur per Denominatorem: Quotiens enim numerabit Integrum à Fractione contentum: Reliquum verò (si quod remanet) erit Numerator ad *propriè dictam* Fractionem ejusdem denominationis.

3 Sit ver:gra: *impropriè dicta* Fractio A B ad *propriè* reducenda. Numerator A dividatur per Denominatorem B: Quotiens C numerabit Integras unitates in Fractione contentas nempè tres; Et quia nullum remanet Reliquum, signum est Fractionem A B tribus Integris præcisè æquare, nihilque Fractionis superesse. Sicq; Fractio $\frac{18}{6}$ reducitur *propriè* ad 3 Integras unitates.

$$\begin{matrix} A & 18 & \\ & — & C\ 3 \\ B & 6 & \end{matrix}$$

At si *impropriè dicta* Fractio sit D E. Simili modo Numerator D dividatur per Denominatorem E: Quotiens enim F numerabit duas Integras unitates in eâ contentas: Reliquum verò G erit Numerator ad *propriè dictam* Fractionem G H, quæ cum duobus Integris F æquivalet propositæ Fractioni *impropriè dicta* D E. Sicque $\frac{16}{7}$ reducitur *propriè* ad $2\frac{2}{7}$

$$\begin{matrix} D & 16 & & 2 & G \\ & — & F\ 2 & — & \\ E & 7 & & 7 & H \end{matrix}$$

PRAXIS XI.

Integrum numerum in data denominationis Fractionem resolvere.

1 Integrum numerum in datam Fractionem resolvimus, cùm ipsum in partes datæ denominationis frangimus, ut evadat Numerator ad datæ denominationis Fractionem *impropriè dictam*. Fractionis enim Denominator per suas unitates semper denominat, ac significat partes æquales, in quas intelligitur Integra unitas esse divisa.

Præ-

2 *Praeceptum*. Numerus Integer multiplicetur per datum Denominatorem: Producto addatur datæ Fractionis (si qua sit) Numerator, ut fiat novus Numerator: cui ductâ lineolâ subnotetur idem Denominator.

3 Sit ex: gra: numerus Integer A resolvendus in minutias, seu Fractionem cujus Denominator sit B. Denominator B multiplicans Integrum A producit C, quod erit Numerator ad eumdem Denominatorem B. Dico Integrum A in æquivalentem Fractionem C B jam esse resolutum.

A	$\frac{80}{5}$	C
16		B

4 Et similiter sit Integer A cum adjunctâ Fractione D E. Denominator E multiplicans Integrum A producit 64, cui addito Numeratore 3, fit F 67, novus scilicet Numerator ad Fractionem quæsitam, cui denique subnotetur idem Denominator 4. Dico $16\frac{3}{4}$ jam resolutum esse in æquivalentem Fractionem $\frac{67}{4}$.

A
16

D $\frac{3}{4}$ E $\frac{67}{4}$ F E

PRAXIS XII.

De Additione Fractionum.

PRaeceptum. Fractiones addendæ reducantur omnes ad unam eamdemque denominationem *per prax. 8.* Deinde addantur simul reductarum Numeratores; Summa, erit novus Numerator ad quæsitam Fractionem ejusdem denominationis æqualem sanè omnibus datis Fractionibus simul sumptis. Si ergo talis Numerator minor fuerit suo Denominatore, summa erit Fractio *propriè dicta*; sin autem, erit *impropriè dicta*: quæ tamen *per prax. 10.* reducatur ad *propriè dictam*.

Sint

Sint ergo tres Fractiones A B, C D, H I simul addendæ. Primò reducantur omnes *per prax.* 8. ad ejusdem denominationis Fractiones L P, M P, N P.

A $\frac{5}{8}$ X $\frac{2}{3}$ C D, $\frac{3}{4}$ H I (A B, C D, H I)

E $\frac{15}{24}$ F $\frac{16}{24}$ G F

L $\frac{60}{96}$ P $\frac{64}{96}$ M P $\frac{72}{96}$ N P

L 60
M 64
N 72
O $\frac{196}{96}$ P Q 2 $\frac{4}{96}$ S P $\frac{1}{24}$ T V

Deinde addantur simul Numeratores L, M, N, ut confletur novus Numerator O, cui subnotetur idem Denominator P. Dico Fractionem O P æqualem esse datis Fractionibus A B, C D, H I simul sumptis. Verùm quia ejus Numerator O major est suo Denominatore P, Fractio erit *impropriè dicta*; adeòque *per prax.* 10. dividatur ejus Numerator O per Denominatorem P: Quotiens enim Q dicit duas Integras unitates: Reliquum verò 4 fiet Numerator ad Fractionē *propriè dictam* S P, quæ tamen *per prax.* 7. revocatur ad minimos terminos T V. Dicimus itaque datas Fractiones A B, C D, H I simul additas æquare Integro Q cum Fractione T V.

PRAXIS XIII.

De Subtractione Fractionum.

1 PRæceptum. Fractiones priùs ad eamdem denominationem reducantur, ut suprà. Deinde reductarum minor Denominator à majore subtrahatur. Residuum enim erit Numerator ad ejusdem denominationis Fractionem, quæ est datarum Differentia quæsita.

2 Ut si subtrahenda sit Fractio A B ab Fractione C D. Reducantur priùs ambæ ad ejusdem denomina-

tionis Fractiones E F, G F. Deinde minor Numerator E subtrahatur à majore G, ut fiat Residuum T, cui subnotetur idẽ Denominator F. Dico Fractionem T F esse differentiam quæsitam datarum Fractionum A B, C D.

A $\frac{5}{8}$ B × C $\frac{2}{3}$ D

E $\frac{15}{24}$ F G $\frac{16}{24}$ F

T $\frac{1}{24}$ F

3 Si verò Fractio ab Integro, vel Integer cum Fractione ab Integro cum Fractione sit subtrahendus.

4 *Præceptum*. Resolvantur Integri in datas Fractiones *per prax.* 11. Reducantur Fractiones ad eamdem denominationem *per prax.* 8. Cœteròque age, ut dictum.

5 Ut si subtrahere debeas Fractionem G F ab Integro A, Resolvatur A in partes datæ denominationis F: hoc est: multiplicetur A per datum Denominatorem F, ut evadat *impropriè dicta* Fractio C F: ex qua subtrahe datam Fractionem G F, ut remaneat Residua Fractio B F: quæ tamen cùm sit *impropriè dicta*, reducitur *propriè* in Integrum D 8 cum Fractione E F.

A 9

G $\frac{5}{8}$ F C $\frac{72}{8}$ F

B $\frac{67}{8}$ F D 8 E $\frac{3}{4}$ F

Et similiter si subtrahere debeas Integrum A cum Fractione G F ab Integro B cum Fractione C D. Resolvatur Integer A cum Fractione G F in partes Denominatoris F, ut evadat Fractio H F. Et similiter resolvatur Integer B cum Fractione C D, ut evadat Fractio I D. Fractiones autem H F, I D revocentur *per prax.* 8. ad ejusdem denominationis Fractiones E M, K M, quarum minor K M subtrahatur ab majore E M, ut remaneat Residua Fractio L M, quæ cùm sit *impropriè dicta*, reducitur *propriè* in Integrum P cum Fractione N M.

A 9 B 5

G $\frac{1}{8}$ F C $\frac{2}{3}$ D

H $\frac{73}{8}$ F × I $\frac{17}{3}$ D

E $\frac{219}{24}$ M K $\frac{136}{24}$ M

L $\frac{95}{24}$ M P 3 N $\frac{11}{24}$ M

PRA-

PRAXIS XIV.

De Multiplicatione Fractionum.

1 IN multiplicatione Integrorum vidimus *suprà prax.* 3. quod Productum semper majus resultat utroque ingrediente termino Multiplicando scilicet, & Multiplicatore. Sicut & in Divisione Integrorum *suprà prax.* 4. novimus Quotientem semper minorem aliquo ingrediente termino resultare putà Dividendo, aut Divisore. At in Fractionibus res è converso se habet; in multiplicatione enim per Fractionem *propriè dictam*, Productum semper resultat minus Multiplicando; maximè quia cùm Multiplicator sit Fractio *propriè dicta*, minor scilicet unitate, tunc Multiplicandus minùs quàm semel sumitur. In divisione verò per Fractionem *propriè dictam* Quotiens resultat semper major utroque termino, Dividendo scilicet, & Divisore; nam Divisor, cùm sit minor Integrâ unitate, plùs quàm semel præcisè continetur in singulis Dividendi unitatibus. Cùm igitur Fractionem per Fractionem multiplicare debes, hoc servato.

2 *Præceptum*. Multiplicentur inter se datarum Fractionum Numeratores, ut producatur novus Numerator. Item multiplicentur inter se earumdem Denominatores, ut producatur novus Denominator. Erit igitur nova Fractio producta ex datarum multiplicatione, & resultabit minor utrâque propositâ.

3 Sit ex: gra: Fractio A B multiplicanda per Fractionem C D. Numeratores A & C in se invicem ducti producunt Numeratorem E. Similiter Denominatores B & D in se invicem ducti producunt Denominatorem F. Dico Fractionem E F (seu ad minimos revocatam terminos G H) productam esse ex multiplicatione Fractionum A B, & C D: quam propterea vides minorem produci utrâque generante, ut notavimus.

A $\frac{3}{8}$ B   C $\frac{2}{5}$ D

E $\frac{6}{40}$ F   G $\frac{3}{20}$ H

tionis Fractiones E F, G F. Deinde minor Numerator E subtrahatur à majore G, ut fiat Residuum T, cui subnotetur idē Denominator F. Dico Fractionem T F esse differentiam quæsitam datarum Fractionum A B, C D.

A $\frac{5}{8}$ B X C $\frac{2}{3}$ D

E $\frac{15}{24}$ F   G $\frac{16}{24}$ F

T $\frac{1}{24}$ F

3 Si verò Fractio ab Integro, vel Integer cum Fractione ab Integro cum Fractione sit subtrahendus.

4 *Præceptum*. Resolvantur Integri in datas Fractiones *per prax*. 11. Reducantur Fractiones ad eamdem denominationem *per prax*. 8. Cœteròque age, ut dictum.

5 Ut si subtrahere debeas Fractionem G F ab Integro A. Resolvatur A in partes datæ denominationis F: hoc est: multiplicetur A per datum Denominatorem F, ut evadat *impropriè dicta* Fractio C F: ex qua subtrahe datam Fractionem G F, ut remaneat Residua Fractio B F: quæ tamen cùm sit *impropriè dicta*, reducitur *propriè* in Integrum D 8 cum Fractione E F.

A 9

G $\frac{5}{8}$ F   C $\frac{72}{8}$ F

B $\frac{67}{8}$ F   D 8   E $\frac{3}{4}$ F

Et similiter si subtrahere debeas Integrum A cum Fractione G F ab Integro B cum Fractione C D. Resolvatur Integer A cum Fractione G F in partes Denominatoris F, ut evadat Fractio H F. Et similiter resolvatur Integer B cum Fractione C D, ut evadat Fractio I D. Fractiones autem H F, I D revocentur *per prax*. 8. ad ejusdem denominationis Fractiones E M, K M, quarum minor K M subtrahatur ab majore E M, ut remaneat Residua Fractio L M, quæ cùm sit *impropriè dicta*, reducitur *propriè* in Integrum P cum Fractione N M.

A 9 G $\frac{1}{8}$ F   B 5 C $\frac{2}{3}$ D

H $\frac{73}{8}$ F X I $\frac{17}{3}$ D

E $\frac{219}{24}$ M   K $\frac{136}{24}$ M

L $\frac{95}{24}$ M   P 3   N $\frac{11}{24}$ M

PRA-

PRAXIS XIV.

De Multiplicatione Fractionum.

1 IN multiplicatione Integrorum vidimus *suprà prax.* 3. quòd Productum semper majus resultat utroque ingrediente termino Multiplicando scilicet, & Multiplicatore. Sicut & in Divisione Integrorum *suprà prax.* 4. novimus Quotientem semper minorem aliquo ingrediente termino resultare puta Dividendo, aut Divisore. At in Fractionibus res è converso se habet; In multiplicatione enim per Fractionem *propriè dictam*, Productum semper resultat minus Multiplicando; maximè quia cùm Multiplicator sit Fractio *propriè dicta*, minor scilicet unitate, tunc Multiplicandus minùs quàm semel sumitur. In divisione verò per Fractionem *propriè dictam* Quotiens resultat semper major utroque termino, Dividendo scilicet, & Divisore; nam Divisor, cùm sit minor Integrâ unitate, plùs quàm semel præcisè continetur in singulis Dividendi unitatibus. Cùm igitur Fractionem per Fractionem multiplicare debes, hoc servato

2 *Præceptum*. Multiplicentur inter se datarum Fractionum Numeratores, ut producatur novus Numerator. Item multiplicentur inter se earumdem Denominatores, ut producatur novus Denominator. Erit igitur nova Fractio producta ex datarum multiplicatione, & resultabit minor utrâque propositâ.

3 Sit ex: gra: Fractio A B multiplicanda per Fractionem C D. Numeratores A & C in se invicem ducti producunt Numeratorem E. Similiter Denominatores B & D in se invicem ducti producunt Denominatorem F. Dico Fractionem E F (seu ad minimos revocatam terminos G H) productam esse ex multiplicatione Fractionum A B, & C D: quam propterea vides minorem produci utrâque generante, ut notavimus.

A $\frac{3}{8}$ B   C $\frac{2}{5}$ D

E $\frac{6}{40}$ F   G $\frac{3}{20}$ H

4 Si verò sit Integer per Fractionem multiplicandus.

Praeceptum. Ex Integro fiat Fractio hoc modo, nimirum, cujus Numerator sit ipsemet Integer, Denominator verò sit unitas. Deinde instituatur operatio sicut dictum est in anteriore praecepto.

5 Ut si multiplicandus sit Integer A per Fractionem CD. Ex Integro A fiat Fractio AB, cujus scilicet Numerator sit ipsemet Integer A, Denominator verò unitas B. Deinde multiplicentur inter se Numeratores A & C, fiatque novus Numerator E: & similiter multiplicentur inter se Denominatores B & D; at quia unitas nec multiplicat, nec dividit, remanet ergo idem Denominator D. Dico Fractionem ED productam esse ex multiplicatione Integri A per Fractionem CD: quae similiter minor est Multiplicando A. & cùm sit *impropriè dicta* reducitur *propriè* ad Integrum G cum Fractione HD.

$$A\,8 \qquad \frac{8\,(A)}{1\,(B)} \quad \frac{2\,(C)}{3\,(D)}$$

$$\frac{16\,(E)}{3\,(D)} \quad G\,5\,\frac{1\,(H)}{3\,(D)}$$

6 Et tandem si multiplicari contingat Integrum cum Fractione per Integrum cum Fractione.

Praeceptum. Resolvantur Integri in suas Fractiones, quas habent annexas, *juxta prax.* 11, ut evadant duae Fractiones *impropriè dicta*: quibus instituatur operaratio, ut dictum est suprà.

7 Sit ex: gra: Integer A cum adjunctâ Fractione CD multiplicandus per Integrum B cum adjunctâ Fractione EF. Jam Integer A resolutus in sibi adjunctâ Fractionem CD *per prax.* 11 evadit cum eâ Fractio *impropriè dicta* GD. Sicut & Integer B resolutus in Fractionem sibi annexam EF evadit cum eâ Fractio *impropriè dicta* HF. Si ergo multiplicentur inter se Numeratores G & H, sicut & inter se Denominatores D & F,

$$A\,8\,\frac{2\,(C)}{3\,(D)} \qquad 12\,(B)\,\frac{3\,(E)}{5\,(F)}$$

$$\frac{26\,(G)}{3\,(D)} \qquad \frac{63\,(H)}{5\,(F)}$$

$$\frac{1638\,(L)}{15\,(M)} \quad 1109\,\frac{3\,(N)}{15\,(M)} \quad \frac{1\,(O)}{5\,(P)}$$

pro-

producitur utique Fractio L M, quæ reducitur *propriè* ad Integrum I cum adjunctâ Fractione N M, sive O P. Ubi cùm multiplicatio fiat non solùm inter Fractiones, aut per Fractionem, verùm etiam inter numeros Integros, Productum resultat procul dubio majus utrolibet multiplicationis termino.

PRAXIS XV.

De Divisione Fractionum.

1 PRæceptum. Fractio, quæ sit Divisor, invertatur: videlicet, quòd ejus Numerator fiat Denominator; Denominator verò fiat Numerator. Tum multiplicentur modo suprà exposito Numeratores inter se, sicut & Denominatores inter se, ut resultet nova Fractio, quæ procul dubio erit Quotiens propositæ divisionis, & major utrâque resultabit Fractione.

2 Ut si dividenda sit Fractio A B per Fractionem C D. Primò Fractio C D, quæ est Divisor, invertatur in D C, permutatis scilicet ejus terminis, ut ver: gra: C qui est Numerator evadat Denominator, & D qui est Denominator evadat Numerator. Deinde Numeratores A & D ut suprà inter se multiplicati producunt Numeratorem E; sicut & Denominatores B & C producunt Denominatorem F. Dico ergo Fractionem E F esse Quotientem resultantem ex divisione Fractionis A B per Fractionem C D: quæ tamen reducitur *propriè* ad Integrum G cum Fractione H F.

A $\frac{2}{5}$ B   C $\frac{3}{8}$ D   D $\frac{8}{3}$ C

E $\frac{16}{15}$ F   G 1   H $\frac{1}{15}$ F

3 Si verò dividendus sit Integer per Fractionem. *Præceptum.* Ex Integro componatur Fractio, subpositâ ei unitate, (ut paulò ante docuimus in præcedente *praxi n.* 5. & 6.). Deinde Fractio Divisor invertatur ut suprà; ac demum fiat terminorum multiplicatio modo jam dicto, ut resultet nova Fractio, quæ erit Quotiens propositæ divisionis.

Sit

4 Sit ex: gra: dividendus Integer A per Fractionem C D. Ex Integro A componatur Fractio A B, subnotatâ scilicet ei pro Denominatore unitate B. Deinde invertatur Fractio Divisor C D ut sit D C. Tum multiplicatis inter se Numeratoribus A & D producitur novus Numerator E; & similiter multiplicatis inter se Denominatoribus B & C producitur novus Denominator F. Dico itaque Fractionem E F resultare ex divisione Integri A per Fractionem C D: quæ tamen cùm sit *impropriè dicta* reducitur *propriè* ad Integrum G. Manifestum est igitur, ut patet in utroque exemplo, quando Divisio fit per simplicem, & propriè dictam Fractionem, Quotientem semper resultare majorem utroque Divisionis termino.

A 8

$A\,\frac{8}{1}\,B \quad \frac{2}{3}\,{}^{C}_{D} \quad {}^{D}_{C}\,\frac{3}{2}$

$\frac{E\,24}{F\,2} \quad G\,12$

5 Et tandem si Integer cum adjunctâ Fractione dividendus occurrat per Integrum cum Fractione.

Præceptum. Resolvantur Integri ad suas Fractiones, quibus singuli annectantur, *per prax*. 11. Deinde instituatur divisio sicut in priore præcepto de simplicibus Fractionibus: hoc est inverso Divisore Numeratores multiplicentur inter se, sicut & Denominatores, ut nova producatur Fractio, quæ erit Quotiens ex Divisione Integri cum Fractione per Integrum cum Fractione resultans.

6 Ut si Integer B cum Fractione E F dividendus occurrat per Integrum A cum Fractione C D. Resolvatur Integer A qui est Divisor in suam annexam Fractionē C D, ut ex illo cum eâ fiat nova Fractio G D illi æqualis. Et similiter resolvatur Integer B in suam Fractionem E F, ut cum eâ pariter fiat nova Fractio H F illi æqualis. Deinde inverso Divisore G D in D G,

B 12 A 8

$E\,\frac{3}{5}\,F \quad C\,\frac{2}{3}\,D$

$\frac{H\,63}{F\,5} \quad \frac{G\,26}{D\,3} \quad \frac{D\,3}{G\,26}$

$\frac{L\,189}{M\,130} \quad I\,1 \quad \frac{59\,N}{130\,M}$

DG, multiplicentur inter se Numeratores H & D: sicut & Denominatores G & F inter se, ut producatur nova Fractio L M *impropriè dicta*, quæ *propriè* reducitur ad Integrum I cum adjunctâ Fractione N M.

De Fractione concretâ,

seu

De Numeratis Fractis.

NUmerus *fractus concretus* (ut definivimus suprà n. 33. hujus §.) dicitur ille *numeratus*, cujus species ex diverso hominum placito diversimodè accipitur, ut pars aliquota alterius speciei *numerati*. Ut est in computo Siculo species Denariorum respectu speciei Assium, vulgò *Graua*: Denarius enim accipitur pro sextâ parte unius Assis. Et similiter species Assium respectu speciei Tarenorum, vulgò *Tarì*: Assis quippe accipitur pro vigesimâ parte unius Tareni. Et tandem species Tarenorum respectu speciei Unciarum, vulgò *Onze*: Tarenus namque accipitur pro trigesimâ parte unius Unciæ. Itaque possumus in hujusmodi Fractorum calculo procul dubio iis omnibus uti, (quantùm scilicet ad Notationem, Numerationem, Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, & Divisionem) quæ pro Integris satis docuimus in superioribus praxibus: cum hac tamen cautelâ: quòd ubi in Integris addendis, subtrahendis &c: attenditur sola Ratio decupla Sedium; in hujusmodi verò Fractorum Additione, Subtractione. &c: præter Rationem Sedium maximè attendi debet Ratio, quam inter se *numeratorum* habent Species. Solent tamen hujusmodi Fractiones à suis Integris ferè nunquam disjungi. Unde sit

PRAXIS XVI.

De Additione numeratorum *cum Fractis.*

SInt addendi tres *numerati* A, B, C, singuli Uncias cum sibi adjunctis Fractionibus concretis, putà Tarenis, Assibus, & Denariis, referentes. Notentur verticali-

caliter numeri more solito. Et incipiendo ab ultimâ à dextris Fractorum specie putà à Denariis, quorum species Rationem habet subsextuplam cum proximè sequente ad sinistras Assium specie, sex enim Denarii unum conficiunt Assem: Colligantur in unum omnes Denarii; suntque novem, ex quibus auferantur, quo fieri potest, Asses, nēpè unus, Reliquūque 3 (si quod remanet) in loco Denariorum subscribatur. Deinde cùm hoc Assi simul colligantur in unum omnes Asses, quorum species Rationem habet vigecuplam cum proximè sequente Tarenorum Specie; suntque trigintaduo Asses, ex quibus auferantur, quò fieri potest, Tareni, nempe unus, Reliquumque 12 more solito subscribatur. Et similiter cum hoc Tareno simul colligantur in unum omnes Tareni, quorum species Rationem habet trigecuplam cum proximè sequente Unciarum specie; suntque quinquagintatres Tareni, ex quibus ablatis Unciis nempè unâ, hanc simul Unciis adde, quarum species est Integra: non enim ordinatur ut pars ad aliam Numerati Speciem. Unde operare sicut in Integrorum Additione docuimus *suprà prax.* 1. Numerus igitur D dabit Summam *numeratorum* quæsitam.

	Unciæ	Tareni	Asses	Denar.
A	4759:	19:	10:	1
B	1634:	8:	15:	5
C	9057:	25:	6:	3
D	15451:	23:	12:	3

PRAXIS XVII.

De Subtractione numeratorum *cum Fractis*.

Subtrahendus sit *numerus* B ex *numerato* A, uterque Uncias, Asses, & Denarios referens: Facto initio à dextris Denariorum subtrahantur inferiores Denarii à superioribus, 5 scilicet ab 3; quod cùm fieri nequeat: ex loco Assium 6 unus sumatur Assis, qui, cùm in sex resolvatur Denarios, simul

cum

cum 3 faciet novem Denarios, à quibus subtrahantur 5 & remanent 4 Denarii subscribendi. Deinde superior numerus Assium 6 minuatur unitate propter Assem jam resolutum in Denarios; dicaturque, 17 ab 5 subtrahi non potest; quapropter ex loco Tarenorum 20 unus sumatur Tarenus, qui, cùm in 20 resolvatur Asses, simul cum 5 faciet 25 Asses, à quibus utique subtrahi possunt 17, & remanent 8 Asses subscribendi. Deinde numerus Tarenorum 20 minuatur unitate propter Tarenum jam resolutum in Asses; dicaturque, 23 ab 19 subtrahi non potest; quapropter ex loco Unciarum 478 una sumatur Uncia, quæ, cùm in 30 resolvatur Tarenos, simul cum 19 faciet 49 Tarenos, à quibus subtrahuntur 23, & remanent 26 Tareni subscribendi. Et tandem numerus Unciarum 478 minuatur itidem unitate propter Unciam jam ablatam, & resolutam in Tarenos, evaditque 477, cum quibus, quia Integra sunt operare more solito, ut suprà docuimus *prax.* 2.

	Unciæ	Taren.	Asses	Denar.
A	478:	20:	6:	3
B	397:	23:	17:	5
C	80:	26:	8:	4

PRAXIS XVIII.

De multiplicatione numeratorum cum Fractis.

1 MUltiplicatio (sicut & Divisio) numeratorum cum sibi Fractis adjunctis maximè locum habent in emptione, & venditione rerum, vulgò *valutare*, seu *valutatione*. Multiformiter solet ab Authoribus hæc absolvi praxis; sed quia omne ejus propositum ad Auream-Regulam facilè est reduci: putà cùm quis quæreret: 150 panni ulnæ cum tribus palmis, singulæ pretio trium Unciarum, quindecim Tarenorum, decem & octo Assium, & quatuor Denariorum emptæ,

quot valebunt? ubi jam vides aliquos datos esse terminos, unũq; eorum quæstionem habere adjunctam; ideò jure hujus praxis intento Regulâ-Trium satisfieri cõvicimur. Fit enim. Si A una panni ulna valet 3 Uncias: cũ 15 Tarenis à 18 Assibus: & 4 Denariis: ulnæ 150 cũ 3 palmis quot valebũt? Quapropter resolvantur termini in minimam Fractorum entitatem: Ulnæ scilicet in palmos, & pretium in Denarios. Fiatque si A 8 palmi valent B 12712 Denarios, C palmi 1203 quot Denarios valebunt? Ubi per Simplicem-Directam multiplicentur secundus, & tertius terminus, B scilicet & C, inter se, & Productum E dividatur per primum A; tunc enim Quotiens D erit quartus quæsitus, hoc est, numerus Denariorum, seu pretium palmorum C. Hos autem Denarios ad Asses reducito (illos scilicet dividendo per 6), & Asses ad Tarenos (illos dividendo per 20), & tandem Tarenos ad Uncias (illos dividendo per 30): ut factum vides; sicque habebis Uncias 530: 29: 14: 3 pretium scilicet ulnarum 150: & 3 palmorum.

ulna	pretium	ulnæ cũ palm.
A 1 ---	B 3:15:18:4 ---	C 150: 3?
palmi	Denarii	palmi
A 8 ---	B 12712 ---	C 1203?

```
                              B 12712
                              -------
                                2406
                               1203
                              8421
                             2406
                            1203
                            ---------
                        E 15292536
                   6) D   1911567
                  20)     31859)4:3
pretium totale    30)     1592)9:14
F 530: 29: 14: 3 ---      530: 29
```

Si ergo ulna una panni ---
Valet Uncias 3: Tarenos 15: Asses 18: & Denarios 4 ---
Ulnæ 150 cum tribus palmis ---
Valebunt Uncias 530: Tarenos 29: Asses 14: & Denarios 3 ---

2 Et sic deinceps operaberis in *valutandis* rebus qui-

quibuſcumque diverſæ ſpeciei, dummodo attendatur ſpecierum Ratio, quam *numerati* habebunt inter ſe.

PRAXIS XIX.

De Diviſione numeratorum *cum Fractis*.

1 DIviſionem *numeratorum* cum ſibi Fractis adjunctis ſimiliter ad Auream-Regulam facilè revocamus, ut dictum eſt: putà cùm quis quæreret: 150 panni ulnæ cum 3 palmis emptæ pretio Unciarum 530 cum 29 Tarenis, 14 Aſſibus, & 3 Denariis, quot valebunt ſingulæ? Ubi vides ex propoſitis terminis aliquem adjunctam habere quæſtionem, adeòq; per Regulam-Trium ſatis abſolvi poſſe propoſitum. Fit enim ſi ulnæ 150 cum tribus palmis valent uncias 530: 29: 14: 3 — quot valebit una ulna. Reſolvantur igitur termini in minimam Fractorum entitatem: ulnæ ſcilicet in palmos, & pretium in Denarios. Fiatque. Si A palmi 1203 — valent Denarios 1911567 —, quot valebunt C palmi 8? Ubi per Simplicem-Directam multiplicentur inter ſe B & C ſecundus ſcilicet & tertius terminus, & Productum dividatur per primum A. Dico Quotientem D eſſe numerum Denariorum, ſeu pretium quæſitum, quos tamen reducito ad Aſſes, & Aſſes ad Tarenos, & tandem Tarenos ad Uncias: ut habeas pro ulnæ pretio Uncias 3: 15: 18: 4.

ulnæ — pretium — ulna
A 150: 3 — B 530: 29: 14: 3: — C 1?

palmi
A 1203 — B 1911567 — C 8?

B 1911567
15292536
3262
8565
1443
2406

6) D 12712
20) 2118: 4
30) 1015: 18
3: 15

F 3: 15: 18: 4 —

Si igitur panni ulnæ 150 cum 3 palmis---
Valent uncias 530: Tarenos 29: Asses 14: & Denarios 3---
Ulna una panni---
Valebit uncias 3: Tarenos 15: Asses 18: & Denarios 4---

2 Cœterùm hæc est omnium certissima, ac universalissima *valutandarum* rerum clarissima methodus, quam cœteris licet brevioribus consultò præferimus tum quia virtualiter eæ in hac continentur, minusq; ducunt ad Scientiam, tum quia nimis prolixum foret omnes hìc illas recensere.

PRAXIS XX.

De extractione Quadratæ Radicis.

1 QUadratus numerus (ut definivimus cum Euclide suprà n. 22. §. 11.) est qui producitur ex duobus æqualibus numeris inter se multiplicatis; seu, quod idem est: qui resultat ex aliquo numero in seipsum ducto. *Radix* autem *quadrata* dicitur ille numerus, qui ductus in seipsum producit *Quadratum*. Ut numerus 9, qui producitur ex duobus 3 inter se multiplicatis, sive ex 3 in seipsum ducto, est *quadratus*; Numerus verò 3 dicitur ejus *Radix quadrata*, seu latus numeri quadrati. Si enim unitates quadrati numeri 9 ita disponantur in figurâ A B C D, ut ex quatuor lateribus fiant æquales unitatum series, putà tres; perspicuum est figuram illam esse quadratam, & quodlibet ejus latus A B, aut B C, aut C D, aut D A, tres continens unitates, latus esse quadrati 9.

A			B
	1	1	1
	1	1	1
D	1	1	1 C

2 Hinc quilibet numerus potens est Quadratum generare: omnis enim numerus est Radix alicujus Quadrati; sed non quilibet numerus est *quadratus*. Inter duos quippe proximos *quadratos* semper tot unitates interjacent, quot fuerint in duplâ Radice minoris Quadrati unitates. Unde fit quòd, duplatâ alicujus

Qua-

Quadrati Radice, & additâ ei unitate, nascitur Quadratus proximè major: sicut & ablatâ ab aliquo Quadrato duplatâ ejus radice, minùs tamen unitate, resultat Quadratus proximè minor. Ut inter quaternarium (qui est *quadratus*, bis enim 2 producit 4) & novenarium (similiter *quadratum*) nullus interest numerus *quadratus*; sed quatuor intercipiuntur unitates: duplum scilicet binarii, qui est Radix Quadrati minoris 4. Si ergo *quadrato* 4 dupla ejus Radix cum unitate addatur, nempe 5, nascitur 9 *quadratus* proximè major; Si verò ab 9 *quadrato* dupla ejus Radix minus unitate auferatur, nempe 5, resultabit 4 *quadratus* proximè minor.

3 Ortum autem habet Quadratorum constructio ex naturali numerorum imparium progressione 1. 3. 5. 7. 9. 11 &c: *suprà n.* 70. §. 2. Per additionem enim terminorum hujusmodi progressionis incipientiū ab unitate generantur successivè omnes numeri *quadrati*. Ita quòd 1, quod est primus terminus progressionis, est primus Quadratus; Huic si addatur 3, quod est secundus terminus, fit 4, secundus scilicet Quadratus; Si huic addatur 5, quod est tertius progressionis terminus, conflatur 9, quod est sequens Quadratus; At si 9 addatur 7 consurgit 16, succedens scilicet Quadratus. Et sic deinceps Quadratis addendo singulos terminos progressionis, omnes *quadratos* numeros procreabis. Unde fit, Quadratum ex tot imparibus numeris componi, ab unitate incipientibus, quot erunt in sua Radice unitates.

4 Numeri verò qui non sunt *quadrati* nullam habere possunt Radicem *rationalem*, quæ scilicet numeris exprimi valeat, unde Radicem habent *surdam*, utpotè quæ nec audiri, nec nominari potest.

5 Extrahere igitur Radicem *quadratam* alicujus numeri nihil aliud est, quàm numerum invenire, qui in se ipsum ductus, seu multiplicatus, numerum adæquet propositum: si is *quadratus* est; vel maximum adæquet Quadratum in ipso contentum, si is *quadratus* non est.

6 Ut Radicem extrahere *quadratam* ver: gra: ex proposito numero 36 est invenire 6, quod in se ipsum du-

ductum præcisè adæquat propositum 36: Quadratum enim est. Et similiter extrahere Radicem *quadratam* ver: gra: ex proposito numero 38, est invenire 6, quod in se ipsum ductum producit 36, maximum scilicet Quadratum in 38 contentum: numerus enim propositus 38 non est *quadratus*, proindeque Radicem non habet *rationalem*, bene verò *surdam*, quæ scilicet nullo potest exprimi numero; gaudet tamen ejus loco eâdem Radice maximi Quadrati 36 in ipso contenti.

7 Cœterùm cum hujusmodi Radicis extractio parum discrepet à communi Divisione per Mixtum, ideo in hac praxi ea serventur omnia, quæ ibi docuimus *suprà prax.* 4. *ex:*3. præter hæc generalia, quæ itidem cole, præcepta.

Præceptum I. Numerus ex quo extrahenda est *Quadtata* Radix punctis alternis subsignetur, habito initio à primâ Sede à dextris, ut factum vides in numero A. Quot enim puncta subsignata numerus admiserit, totidem in eo membra distinguimus, totque characteribus Radix constabit extrahenda. Ut in proposito numero A tria sunt puncta alternatim subsignata; ergo tria distinguenda sunt in eo membra, tribusque constabit characteribus ejus Radix eruenda.

A
145807
. . .

Præceptum II. Numero A jam punctis subsignato, ac propterea totidem membris in eo distinctis, factoque à sinistris initio, eruatur *Quadrata* Radix è primo membro 14 (usque scilicet ad punctum inclusivè) hoc est inveniatur numerus, qui in se ipsum ductus, aut membrum illud adæquet, aut saltem sit maximus ex Quadratis in membro contentis. Ut ex 14, quod non est Quadratum, *quadrata* Radix educi non potest, sed tantùm invenitur 3, quod in seipsum multiplicatum producit 9, maximum scilicet Quadratum in 14 contentum; quod tamen subtrahatur ab 14, ut remaneat 5, Reliquum scilicet more solito subscribendum. Erit igitur 3 prima quæsitæ Radicis figura, quæ post lineolam seponatur à dextris, ubi etiam reliquæ verticaliter erunt subscri-

A
145807 | 3
. . .
5

scribendæ eo ordine, quo successivè extrahuntur, ut factum vides infra.

Præceptum III. Demittatur secundum membrum 58 (videlicet usque ad sequens punctum inclusivè) & Reliquo 5 à dextris adnotetur, ut evadat Dividendum 558. Deinde

A
145807 | 3
558

Præceptum IV. Dupletur Radix inventa, scribaturque à sinistris, nempè 6 velut Divisor, per quem dividatur ipsum 558; ita tamen ut Dividendum 558 debeat non solùm totum Divisorem 6, verùm etiam & Quadratum Quotientis, simul continere, alioquin divisio tunc fieri nequit.

A
145807 | 3
6 | 558

Quod propterea ut assequaris. Ultima à dextris Dividendi Sedes, seu figura 8 non computetur in Divisione, sed reservetur pro quadrando Quotiente; Attentatio autem continentiæ Divisoris in Dividendo fiat in cœteras Dividendi figuras, ultimâ exceptâ, nempè in 55, modo solito Divisionis per Mixtum *suprà prax. 4. ex: 3*; sed semper attendatur, Quotientis Quadratum contineri simul debere in ultimâ reservatâ Dividendi Sede 8, sive aucta sit ab aliquo mentali Reliquo, quod ex divisione superfuerit, sive non. Unde fit, quod si totus Divisor non valeat in Dividendi, ultimo semper excepto, characteribus contineri: vel si Divisor contineatur quidem, attamen Quotientis Quadratum non valeat in reliquâ seu ultimâ Sede contineri: constans signum est Divisionem fieri non posse sub his terminis. Quapropter posito à dextris post lineolam pro Quotiente seu Radice zero (juxta quæ documus ibidem n. 15.), statim demittatur sequens aliud membrum numeri propositi A, quod & adnotetur à dextris eidem Dividendo, ut sic jam auctum valeat Divisorem simul & Quotientis Quadratum continere.

Ut in Dividendo 558 dicam 6 in 55 contineretur novies, & superest 1, quod cum reservato 8 facit 18: Quotientis autem 9 Quadratum 81 contineri non valet in 18; Unde minui Quotientem oportet, dicam-

camque 6 in 55 continetur octies, & remanet 7, quod cum reservato 8 facit 78, in quo Quotientis 8 Quadratum 64 utique contineri potest. Ponam igitur 8 à dextris post lineam sub 3, & itidem 8 à sinistris post Divisorem 6, ut fiat 68. Deinde singuli characteres Divisoris 68 more solito multiplicentur in Radicem inventam 8, & mentale productum subtrahatur ab correspondente Dividendi Charactere, Reliquumque subscribatur, ut satis exemplificavimus suprà loco citato.

```
      A
145807 | 3
 . . .
68 | 558   | 8
     14
```

Erit igitur ex hac Divisione Reliquum 14, cui reliquum propositi numeri membrum 07 demissum adponatur, ut jam evadat Dividendum 1407. Dupletur itaque Radix hactenus inventa 38, fitque 76, quod erit novus Divisor ad 1407, servatâ tamen eâdem cautelâ de excipiendo ultimo charactere 7 pro quadrando Quotiente; & instituatur Divisio eo prorsus modo, quo nunc fecimus, sicque habebis Quotientem 1 reliquum scilicet charactere quæsitæ Radicis 381. Ubi vides ex ultimâ Divisione superesse Reliquum 646; quod signum est evidens, propositum numerum A non esse *quadratum*, subindeque Radicem non habere *rationalem* neque integram, neque Fractam, sed tantùm *surdam*: Radicemq; inventam 381 non esse propositi numeri Radicem, bene verò maximi Quadrati in eo contenti. Et solùm pro quadam approximatione ad ejus *surdam* Radicem, Reliquum 646 fiat Numerator ad adjunctam Fractionem, cujus Denominator si fuerit duplum Radicis inventæ, nempè 762, Radix erit major verâ, si verò ei addatur unitas, nempe sit 763, Radix erit minor verâ.

```
      A      B
145807 | 3
 . . .
68  | 558  | 8
761 | 1407 | 1
```

$$B\,381\,\frac{646}{762}\,\begin{matrix}C\\D\end{matrix}$$

$$B\,381\,\frac{646}{763}\,\begin{matrix}C\\F\end{matrix}$$

Propositi igitur numeri A Radix B cum Fractione C D erit major verâ, cum Fractione verò C F, erit minor verâ.

Com-

12 *Monitum*. Animadvertendum est tamen primò, quòd ubi post demissum Membrum Dividendus non sufficit duplo Radicis priùs inventæ, & simul Quadrato Quotientis, ut dictum est, signum erit tunc Divisionem sub illis terminis fieri non posse; quapropter pro Quotiente ponatur Zerus in Radice à dextris post lineolam, & demittatur aliud Membrum sequens, quod & adponatur horizontaliter priori Dividendo, qui non suffecerat, ut jam auctior factus valeat Divisori sufficere modo supra dicto. Secundò quòd Ultimum Reliquum C nunquam superare debet duplum Radicis inventæ, nempe D, alioquin justò minorem te scito Radicem assumpsisse: quapropter eam augebis, vel unitate.

13 Commodiùs autem obtineri solet major Radicis approximatio per numeros *decadicos quadratos*: ut sunt 100, cujus Radix est 10: vel 10000, cujus Radix est 100: vel 1000000, cujus Radix est 1000.

14 Ut si propositi numeri A non *quadrati* extrahenda sit, quo fieri potest, proximior Radix. Multiplicetur numerus propositus A in aliquem decadicum *quadratum* nempe G, quod facilè obtinebis, ei à dextris adnotando sex illos zeros numeri decadici G, ut producatur numerus H, ex quo extrahatur modo jam exposito *quadrata* Radix B, omissoque ultimo Reliquo C, tamquam ferè nihilo, hæc dividatur per decadici Radicem D, quod facilè fiet, demptis tribus ultimis à dextris ejus figuris 846, quæ quidem evadunt Numerator ad adjunctam Fractionem, cujus Denominator erit ipse Divisor D, ut factum vides in apposito exemplo. Erit igitur Radix quæsita B cum fractione E F,

A 145807
. . .
G 1000000

H	145807000000	B
	. . . . . .	3
68	558	8
761	1407	1
7628	64600	8
76364	357600	4
763686	5214400	6
	C 632284	

D 1000) B 381 $\frac{846}{1000}$ E/F

semper minor verâ; sed quò major adjicitur Decadicus *Quadratus* G, plures scilicet habens zeros, eò Radix veræ proximior educetur.

Examen extractionis quadratæ Radicis.

Radix inventa ducatur in se ipsã, & Producto addatur ultimum Reliquum, si quod superfuerit; Summa enim esse debet æqualis numero proposito. In longioribus autem numeris brevitatis gratiâ solùm expendatur, si ultimum Reliquum non superet duplum Radicis inventæ, ut suprà monuimus; tùc enim velut à signo certus esse poteris de extractionis rectitudine, si verò tale Reliquum superaret duplum Radicis inventæ, certus esto de extractionis errore.

PRAXIS XXI.

De extractione Cubicæ Radicis.

1 CUbicus numerus (ut definivimus cum Euclide suprà *n.* 23. § 2.) est qui producitur ex tribus æqualibus numeris inter se multiplicatis, seu, (quod idem est) qui resultat ex multiplicatione Quadrati in Radicem. *Radix* autem *Cubica* dicitur illa Radix, quæ multiplicans suum Quadratum producit Cubum. Ut numerus 8 qui producitur ex tribus 2 inter se multiplicatis, videlicet *bis duo bis*, est numerus *cubicus*: bis enim duo faciunt Quadratum 4, quo iterum in Radicem ducto, bis quatuor producunt 8 Cubum. Numerus verò 2 dicitur ejus *Radix cubica*, ex qua Cubus 8 gignitur.

2 Hinc omnis numerus, quemadmodum de *Quadratis* est dictum, potens est Cubum generare; non autem quilibet numerus est Cubus. Si enim *quadrati* numeri quia sunt in duplicatâ Ratione (supra n. 46. § 2.) Radicum non omnis numerus potest esse *quadratus*; à fortiore nec *Cubici*, qui sunt in duplicatâ Ratione Quadratorum; sed inter duos *Cubicos* numeros sibi immediatè succedentes tot unitates interjacent, quot fuerint

in

in minoris Cubi triplâ Radice, & simul triplo Radicis Quadrato unitates. Unde fit, quòd si alicui Cubo addatur ter ipsa Radix, terque Radicis Quadratum simul, cum unitate, consurget Cubus proximè major.

3 Ut inter numeros 8 & 27 *cubicos* nullus interest numerus *cubicus*; sed 19. intercipiuntur unitates, sex scilicet quæ sunt triplum Radicis 2, minoris Cubi 8, & duodecim aliæ, quæ sunt triplum Quadratum ipsius Radicis 2. Si ergo Cubo 8 tripla ejus Radix 2, nempe 6 & triplum Radicis Quadratum nempe 12 cum unitate simul addantur nempe 19 consurget utique Cubus 27 proximè major.

4 Ad generationem autem Cuborum aliter concurrit naturalis imparium numerorum progressio, ac ad ortum Quadratorum in superiore praxi. Nam licet quilibet Cubus tot terminos impares prædictæ progressionis in se contineat, quot fuerint in suâ Radice unitates; non tamen hoc fit habito semper initio ab unitate, ut diximus in Quadratis; sed primo Cubo, cujus Radix est 1, primus assignatur progressionis terminus; Secundo Cubo, cujus Radix est 2, duo succedẽtes assignantur progressionis termini; tertio Cubo, cujus Radix est 3 tres sequentes adscribuntur progressionis termini; quarto Cubo quatuor inde succedentes; quinto quinque; sexto sex; & ita consequenter. Ut sit ver: gra: Series A F naturalis progressio *absoluta* numerorũ *cubicas* Radices repræsentãtium. Sitque proinde Series

A B C D E F
1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
G H I K L M
1. 8. 27. 64. 125. 216. &c.
N O P Q R S T V X Z
1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. &c.

G M, quæ Cubos continet suprapositis Radicibus correspondentes. Et tandem constituatur series N Z, naturalis scilicet imparium numerorum progressio. Jam vides, primum Cubum G, cujus Radix est A 1, æqualem esse primo progressionis termino N; secundum verò Cubum H, cujus Radix est B 2, æqualem esse duobus sequentibus progressionis terminis O, P; tertium Cubum I, cujus Radix est C 3, æqualem

lem esse tribus succedentibus progressionis terminis Q R S; quartum autem Cubum K, cujus Radix est D 4, æqualem esse quatuor consequentibus terminis T, V, X, Z; & ita deinceps producentur cœteri omnes Cubi, tot scilicet terminis progressionis simul sumptis, quot fuerint in *cubica* Radice unitates.

5 Numeri verò, qui *cubici* non sunt, nullam habere possunt Radicem *rationalem*; unde *surdam* vocamus eorum Radicem, quemadmodum in *quadratis* est dictum.

6 *Cubicam* autem extrahere Radicem alicujus numeri est numerum invenire, qui, ductus in suum Quadratum, propositum adæquat numerum: si is *cubicus* est: vel maximum adæquat Cubum in proposito contentum, si ille cubicus non est.

7 Ut Radicem extrahere *cubicam* ver: gr: ex proposito numero 27: est invenire 3, quod ductum in suum Quadratum 9 (ter enim tria faciunt 9) præcisè adæquat propositum 27, quia is Cubus est. Sicut pariter extrahere *cubicam* Radicem ex proposito numero 36 est quoque invenire 3, quod ductum in suum Quadratum 9 producit 27 maximum scilicet Cubum in 36 contentum: numerus enim 36 non est *cubicus*, & propterea Radicem *rationalem* habere non potest, unde solùm gaudere dicitur eâdem Radice maximi Cubi in eo contenti cum aliquali approximatione.

8 Denique cùm Radicis *cubicæ* extractiò majorem implicare videatur molestiam, quàm in *Quadratæ* extractione fuerimus experti, ideò in eâ explicādâ major à nobis exposcitur diligentia, clariorque methodus adhibenda. Ante omnia ergo fiat tabella continens Cubos novem Digitorum, quos etiam memoriâ tenere est opus, ut promptior reddatur praxis executio.

Rad.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cub.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

9 Datus igitur numerus A, ex quo extrahenda est Radix *cubica*, distinguatur in aliquot membra, puncto

cto scilicet post singulos ternos characteres subsignato. Hoc est primo à dextris characteri 8 punctum sub. notetur deinde duabus relictis figuris notetur punctum sub quartâ figurâ 1; & iterum duabus aliis omissis notetur punctum sub septimâ figurâ 7; & sic deinceps versus lævam puncta subnotētur duabus semper prætermissis figuris quò ad numerus extiterit. Quot enim puncta numerus admiserit, in tot censetur membra distingui, totque figuris Radix constabit extrahenda, quemadmodum de Quadratis est dictum *in superior. prax. præcep.* I. Unde quia in dato numero A tria solummodo subsignantur puncta, tria ergo in eo membra distinguimus nimirum 57, 681, 358, tresque propterea Radix est habitura characteres.

A 57681358
  . . .

Operatio in primum Membrum.

10 *Præceptum I.* Ex appositâ Cuborum Tabellâ sumatur Cubus C æqualis, aut proximè minor primo Membro 57, ut est 27, qui verticaliter ei subscribatur, ut fiat inde subtractio. Cubi autem C Radix 3 scribatur supra lineam dato numero A superductam: idest verticaliter notetur supra primum à dextris punctum; ut vides in B.

B 3
A 57681358
C 27

11 *Præceptum II.* Cubus C ex tabella desumptus subtrahatur à primo Membro 57. ut remaneat primum Reliquum 30 mox adaugendum per demissionem secundi Membri.

B 3
A 57681358
C 27
H 30

Operatio in secundum Membrum.

12 *Præceptum III.* Demittatur dati numeri A secundum Membrum 681, & primo Reliquo 30 hori-

rizontaliter à dextris adjungatur, ut jam evadat secun-

E	2700	B	3	R	30
		A	57681358		30
					900
		C	27		3
		D	30681	E	2700

dum Membrum D 30681 Dividendum, cujus tamen Divisor sic inquiratur.

13 *Praeceptum IV.* Radici inventæ 3. Zerus à dextris adponatur, fiatque R 30, cujus Quadratum 900 triplicetur, & fit numerus E 2700, qui erit se- secundi Membri D quæsitus Divisor.

Monitum I. Ut autem fiat apta Divisio animadvertendum est ante omnem attentationem, debere Dividendi D & Divisoris E Characteres taliter inter se comparari, quòd primus à dextris Divisoris character o correspondere intelligatur primo à dextris Dividendi characteri 1, sicque secundus Divisoris character o secundo Dividendi Characteri 8, & tertius Divisoris tertio Dividendi, & ita consequenter de reliquis utriusque characteribus versus sinistras quousque Divisor extiterit. Excessus enim omnis 3 (si quis inveniatur à sinistris Dividendi D, quando scilicet Dividendus longior fuerit Divisore) simul cum antecedente ejusdem charactere o, qui scilicet in comparatione correspondit ultimo à sinistris Divisoris Characteri 2, sumatur in unum nempe 30, & sic totum 30 correspondere dicitur primo à sinistris Divisoris characteri 2. At si in hujusmodi comparatione figurarum Divisor E aut major, aut æqualis inveniatur Dividendo D: manifestum erit, divisionem sub his terminis nec attentari posse; quare posito zero pro secundâ Radicis figurâ seu Quotiente post B, demittatur aliud Membrũ dati numeri A, & à dextris adponatur eidem Dividendo, ut sic evadat tertium Membrum D, de quo infra suo loco.

14 *Praeceptum V.* Hac igitur suppositâ characterum comparatione jam divisionem incipies more solito,

to, quærens scilicet quoties prima à sinistris Divisoris E figura 2 contineatur in 30 Dividendi.

Monitum II. Hic autem memento, numerum E non esse totum Divisorem, sed illi addi debere alios numeros, qui oriuntur ex ipsâ Quotientis figurâ, quæ quæritur; ideoq; non nisi per repetitam attentationem id fieri potest.

Attentemus igitur an, si 2 in 30 contineretur octies, res bene succedat. Sitque propterea 8 secunda Radicis figura, quæ cum priore 3 faciet 38.

15 *Præceptum VI.* Radix priùs inventa in B 3 cum apposito Zero nempe R 30, triplicetur, & fiet 90, cui addatur hæc Radix novissimè assumpta 8, ut fiat 98, quod præterea multiplicetur per ipsam Radicem 8, & producitur numerus F 784.

E	2700	B	3	R	30
F	784	A	57681358		3
	3484				90
	8	C	27		8
G	27872	D	30681		98
		G	27872		8
		H	2809	F	784

16 *Præceptum VII.* Hoc autem productum F 784 addatur Divisori E 2700, & augetur 3484, quod itidem multiplicetur per eamdem Radicem 8 novissimè inventam, & producitur numerus G, totus scilicet Divisor omnibus fretus numeris, quos ei addi debere insinuavimus *suprà præcept; V*; qui propterea subtrahatur à secundo Membro seu Dividendo D, & remanet secundum Reliquum 2809, pariter adaugendum per demissionem tertij Membri mox faciendam.

Monitum III. Duo tandem hìc animadvertas oportet. Primò quòd si præfatus numerus G à Dividendo D subtrahi non possit, evidenter signum est, rem non benè succedere cum assumptâ Radice 8, eò quia nimis magna fuerit assumpta; quapropter eam minuere debes saltem unitate, ut jam sit ver: gra: 7, cum qua

ite-

iterum attentabis, ea omnia replicando, quæ cum Radice 8 patraveras, donec fieri queat Subtractio numeri G ab Dividendo D. Secundò triplicetur Radix 38 hactenus inventa, Productum est L; insuper Radicis 38 Quadratum est 1444, quod triplicatum produdit I; Producta autem L & I simul addita faciunt M. Si ergo secundum Reliquum H, ex præfatâ subtractione resultans, majus fuerit numero M, idest triplo Radicis 38 hactenus inventæ simul & triplo Radicis Quadrato, evidens quoque signum erit, rem non bene succedere cum assumptâ Radice 8, eò quia nimis parva assumpta fuerit; quare eam augere debes saltem unitate; & iterum attentare modo jam exposito, donec numerus M non superetur à Reliquo H.

B	3 8	R	38	R	38
A	57681358		38		3
	. . . .		304	L	114
C	27		114		
D	30681		1444		
G	27872		3		
H	2809	I	4332		
		L	114		
		M	4446		

17 Cum igitur in proposito nostro, & bene succedat subtractio Divisoris G ex Dividendo D: & Reliquum H non superet triplum Radicis 38 & simul triplum Radicis Quadratum nempe M: Signum est evidens benè nos esse operatos, sumendo pro Radice hujus secundæ operationis, 8. Ideoque 8 erit vera secunda Radicis figura, quæ pariter scribenda est supra lineam dato numero A superductam, idest supra secundum punctum, ut vides in B: quæque cum priore 3 faciet 38.

Ope-

Operatio in tertium Membrum.

18 Est tota similis præcedenti quantùm ad præceptorum formam, & solùm materialiter ab eâ diversa, pro ut scilicet diversa occurrerit numerorum quantitas; unde totam sub iisdem præcedentis formulis, ac præceptis dispertiemur. Sit ergo iterum

19 *Præceptum III.* Demittatur tertium Membrum 358, & secundo Reliquo H horizontaliter à dextris adjungatur, ut evadat novus Dividendus D, cujus tamen Divisor simili modo inquiratur, ut supra docuimus *in præcepto IV.* Sit ergo iterum

20 *Præceptum IV.* Radici hactenus inventæ 38 zerus à dextris adponatur, ut fiat 380, cujus Quadratum triplicetur, & fit numerus E: hic enim erit novi Dividendi D quæsitus Divisor. Quare servatis iisdem cautelis, tum de rectâ comparatione characterum, tum de futuro Divisoris augmento, quas supra monuimus *Monit. I. & II.* experiamur an, si 4 Divisoris E in 28 Dividendi D contineatur sexties, res bene succedat pro Quotiente 6. Sitque propterea 6 ultima quæsitæ Radicis figura, quæ cum priore 38 faciet 386.

E 433200	B 3 8	R 380
	D 2809358	380
		144400
		3
		E 433200

Sit iterum

21 *Præceptum VI.* Radix priùs inventa in B 38 cum apposito zero, nempe 380, triplicetur ut fiat 1140, cui addatur hæc novissimè inventa 6, & fit 1146, quod prætereà multiplicetur per ipsam Radicem 6, & producitur numerus F. Tum sit iterum

E 433200
F 6876
440076
6
G 2640456

B 3 8
D 2809358

R 380
3
1140
6
1146
6
F 6876

22 *Præceptum XII.* Productum F addatur Divisori E & augetur 440076, quod quidem multiplicetur per eamdem Radicem novissimè inventam 6, ut producatur numerus G, totus scilicet Divisor omnibus adauctus numeris, quos ei addi debere monuimus *suprà Monit. II*, qui propterea subtrahatur à tertio Membro seu Dividendo D, & remanebit ultimum Reliquum H; Quod tamen superare non debet triplum totius Radicis hactenus inventæ 386, & simul triplum Radicis Quadratum nempe numerum M, ut vides infra, alioquin nimis parvam assumpsisses Radicem 6; Sicut nec numerus G major esse debet Dividendo D, alioquin nimis magnam assumpsisses eamdem Radicem, ut annotavimus *Monit. III.*

B 3 8 6
D 2809358
G 2640456
H 168902

R 386
386
2316
3088
1158
148996
3
I 446988
L 1158
M 448146
1
N 448147

R 386
3
L 1158

At-

23 Atqui post assumptam Radicem 6 res bene succedit, tum quò ad posse subtrahi Divisorem G ab Dividendo D, tum quò id non excedere Reliquum H supra numerum M; manifestum igitur erit signum, rectè nos esse operatos sumendo 6 pro Radice hujus tertiæ operationis, & 386 pro Radice *cubica* totius dati numeri A.

24 Denique ultimum Reliquum H satis ostendit datum numerum A *cubicum* non esse, proindeque *rationalem* non habere Radicem, sed tantummodo *surdam*: hancque, quam modò extraximus 386, suam non esse Radicem, bene verò maximi Cubi C in eo contenti. Unde solùm ob competentem quamdam approximationem fieri potest Fractio, cujus Numerator sit ultimum Reliquum H, Denominator verò sit numerus M cum addita unitate videlicet numerus N.

A 57681358   B 386 $\frac{H\ 168902}{N\ 448147}$

C 57512456

25 Dico ergo Radicem B 386 cum Fractione H N constituere *Cubicam* Radicem numeri majoris Cubo C, & minoris dato A, adeoq; Radicem inventam esse verâ minorem.

Examen extractionis Cubicæ *Radicis.*

Radix invētâ ducatur in suum Quadratum, & Producto addatur ultimum Reliquum H, si quod superfuerit; Summa esse debet æqualis numero dato A. Vel ex signo dignoscere poteris errorem aut rectitudinem extractionis ex iis quæ annotavimus suprà *Monit.* III.

Placet hic totam extractionem præfatam sub unico schemate comprehendere.

Locus Radicis	B	3	8	6	*Cubicæ*
Datus numerus	A	57	681	358	*ex quo extrahenda est Radix &c.*

Operatio in Primum Membrum.

B	3
A	57
C	27
H	30

Operatio in Secundum Membrum.

E 2700
F 784
3484
8
G 27872

B 8
D 30681
G 27872
H 2809

R 30
30
900
3
E 2700

R 30
3
90
8
98
8
F 784

R 38
38
304
114
1444
3
I 4332
L 114
M 4446

R 38
3
L 114

Operatio in Tertium Membrum.

E 433200
F 6876
440076
6
G 2640456

B 6
D 2809358
G 2640456
H 168902

R 380
380
30400
114
144400
3
E 433200

R 380
3
1140
6
1146
6
F 6876

R 386
386
2316
3088
1158
148996
3
I 446988
L 1158
M 448146
1
N 448147

R 386
3
L 1158

CONCLUSIO

Tota ergo Radix B 3 8 6 *hactenus extracta non erit dati numeri* A 57681358 *quia cubicus non est; bene verò maximi Cubi* C 57512456 *in illo contenti.*

Approximatur tandem ad surdam dati numeri A *Radicē*

Radix B 386 $\frac{H\ 168902}{N\ 448147}$ *minor verā.*

Examen extractionis

Datus numerus	A	57681358	
Radix	B	386	*extracta*
		386	
		2316	
		3088	
		1158	
Radicis		148996	*Quadratum*
		386	
		893976	
		1191968	
		446988	
Cubus	C	57512456	*extracta Radicis*
Ultimum Reliquum	H	168902	
Datus numerus	A	57681358	*qui suprà.*

PRAXIS XXII.

De Summâ Progressionis arithmeticæ.

1 SI cujuscumque arithmeticæ Progressionis (suprà § 2. n. 59.) verb. gra. A B terminos omnes simul in unam velis colligere Summam, hæc tria servato præcepta.

2 *Præceptum I.* Numera multitudinem terminorum Progressionem componentium, putà an sint tres aut quatuor, aut quinque, quam seorsim figurâ notabis, velut in C.

3 *Præceptum II.* Extremi duo Progressionis termini A & B simul addantur, & summam pariter notabis, velut in D.

F 35		F 34
A 3. 5. 7. 9. 11 B		A 4. 7. 10. 13 B
C 5	3 A	C 4 — 4 A
E 7	14 D	17 D
35 F		2 E
		F 34

4 *Præceptum III.* Necesse est autem alterum notatorũ, videlicet sive C sive D, parem esse numerum, quem propterea bifariam divide, dimidiumque E per reliquum notatorum multiplica. Productum enim F æquale erit omnibus datæ Progressionis terminis simul sumptis. Ut in dexterâ Progressione, 4 & 7, & 10, & 13 simul faciunt F 34, & in sinistrâ Progresſione, 3 & 5, & 7, & 9, & 11 simul faciunt F 35.

PRAXIS XXIII.

De Summâ Progressionis geometricæ.

1 PRæceptum I. In Progresſione seu continuâ Proportione geometricâ A B minimus terminus A subtrahatur ab maximo B & Differentia C servetur.

Præ-

2 *Præceptum II.* Deinde si Proportio sit *dupla*: Differentia C addatur maximo termino B. Summa enim F erit æqualis omnibus datæ Progressionis terminis simul sumptis, ut factum vides.

F 93
A 3. 6. 12. 24. 48 B
3 A
45 C
48 B
F 93

3 Si autem Proportio fuerit *tripla*: Dimidium Differentiæ C nempe D addatur maximo termino B, & fiet Summa F quæsita. ut hìc vides.

F 242
A 2. 6. 18. 54. 162 B
2 A
160 C
80 D
162 B
F 242

4 Si verò fuerit *quadrupla* Proportio: tertia pars Differentiæ C nempe E addatur maximo termino B, & fiet Summa F quæsita, ut hìc vides.

F 341.
A 1. 4. 16. 64. 256. B
1. A
225 C
85 E
256 B
F 341

5 Cœterùm si Proportio fuerit *quintupla*: quartam accipe partem Differentiæ C. Si *sextupla*: quintam partem. Si *septupla*: sextam; & ita consequenter in reliquis *Multiplicis* Rationis speciebus, semper scilicet minùs uno, quàm fuerit Progressionis Denominator, accipito Differentiæ partem.

6 In *Superparticulari* verò Ratione, si Proportio fuerit *sesquialtera*: duplum Differentiæ C addatur maximo termino B, & fiet Summa Progressionis quæsita F ut hìc vides.

F 325.
A 40. 60. 90. 135. B
40 A
95 C
95 C
135 B
F 325

7 Si Proportio fuerit *sesquitertia*: triplum Differentiæ C addatur maximo termino B, & fiet Summa quæsita F, ut hìc vides in F 37

F 37.
A 9. 12. 16 B
9 A
7 C
7 C
7 C
16 B
F 37

F 1845.
A 320. 400. 500. 625 B
320 A
305 C
4
1220
625 B
F 1845

8 Et tandem si Proportio fuerit *sesquiquarta*: quadruplum Differentiæ. Si *sesquiquinta*: quintumplum. Si *sesquisexta*: sextuplum &c. semper addatur maximo termino B, & fiet Summa æqualis omnibus datæ Progressionis terminis simul sumptis. Et ita proportionabiliter est de consequentibus dicendum.

9 Hactenus fecimus de Algorithmo; Reliquas nãque Arithmeticæ praxes ut *Alligationis*, *Falsæ positionis* &c. nec non & innumeras numerorum proprietates nunc liberè omittimus, ne in majus, quàm par est, præsentem videamur extendere paragraphum, nostrumque isagogicum excedere propositum: confisi hìc ea satis delibasse, quæ benevolo promisimus Tyroni *suprà Monit. II.* § 1. ad prærequisitam de his scientiam habendam; Cœtera quippe faciliter non minus, ac feliciter ex dictis elici posse, nemo non videt.

****

CAPUT TERTIUM

De Continuâ Quantitate, ejusque generibus.

1 Q*Vantitas continua*, seu *Magnitudo* est extensio in partes simul existentes, atque termino communi copulatas.

2 *Terminus est, quod alicujus extremum est*; quo pacto indivisibilis esse censetur in ordine ad id cujus est extremum: sive sit aliàs divisibilis, sive non. ut clariùs infra. Unde dicitur communis, quando inter duas partes intercedens utramque connectit. Def. 13. 1.

3 *Punctum est, cujus pars nulla*, hoc est quod prorsus indivisibile à nobis ita concipitur, ut in ejus conceptu nullam profectò sensibilem, nec intelligibilem ei partium extensionem concedamus. Hinc patet, punctum mathematicum privativè opponi magnitudini; Siquidem proprium est magnitudinis partes habere, sed puncti proprium est partibus omninò carere. Unde nec quantitas propriè dici potest, nisi in quantum accipitur pro quodam intelligibili principio totius quantitatis continuæ, & pro nexu partium, quo universaliter omnes simul copulantur ad continuum constituendum. Nil tamen vetat, quin etiam magnitudo re verà divisibilis, velut punctum mathematicum à nobis assumi possit, si in ejus conceptu ab omni distinctione partiũ penitus abstrahamus, juxta novã *indivisibiliũ methodum* à P. Cavallerio superiore seculo inventam. Sicque in mensurationibus faciendis etiam *pes* geometricus, aut *palmus* aut *digitus* facilè nobis erit in punctum mathematicum, si velut indivisibilis mensura concipiatur. Def. 1. 1.

4. Cùm igitur magnitudo sit in partes extensio, tot erunt genera magnitudinis, quot extensionis genera sive dimensionis; quidquid enim extenditur secundùm aliquam mensuram extenditur. Sed

5 Tria sunt genera dimensionis, nempe, *longitudo, latitudo, & profunditas* seu *altitudo*: quidquid enim continuè extenditur nequit aliter, ac secundùm *longum, latum*, & *profundum* mensurari: hac quippe trinâ dumtaxat dimensione omnia, quæ in mundo sunt mensurabilia, absolutè metiri solemus, neque aliud ulterius dimensionis genus in natura hactenus excogitari unquam potuit.

6 Tria ergo sunt genera magnitudinis, nempe, *Linea, Superficies*, & *Solidum* seu *Corpus*: Extensio quippe secundùm *longum* tantùm, *Lineam* constituit; extensio verò secundùm *longum, & latum*, constituit *Superficiem*; extensio denique secundùm *longum, latum, & profundum*, *Solidum* constituit seu *Corpus*. Quorum tamen procreationes, unius scilicet ex alio, non ineptè solent motu seu *fluxu* eorumdem exemplificari, ut jam inter recentiores plurimi magnitudinem omnẽ considerant per motum generari, sicque facilitatem demonstrationibus afferunt.

Def. 2. 1. 7 *Linea igitur est longitudo latitudinis expers*: hoc est, magnitudo quæ longitudinem tantùm habet, omnique caret latitudine, & profunditate: unde divisibilis est secundùm longum, indivisibilis verò secundum latum, & profundum. Exemplificatur autem fluxu puncti, per quem nonnisi longum aliquod imaginari possumus vestigium describi, quod est *Lineæ* constitutivum.

Def. 5. 1. 8 *Superficies est, quæ longitudinẽ latitudinẽque tantùm habet*: hoc est, magnitudo quæ profunditate tantùm caret: unde divisibilis est secundùm longum, & latũm, indivisibilis verò secundùm profundum. Exemplificatur namque fluxu lineæ lateraliter motæ, quo, suprà longitudinem lineæ, latitudo videtur acquiri, omni carens profunditate, & propterea *Superficiem* constituens.

Def. 1. 11. 9 *Solidum* seu Corpus *est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet*: hoc est magnitudo trinam habens dimensionem, ac proinde omnimodè divisibilis, videlicet secundùm longum, latum, & profundum. Exemplificatur verò fluxu superficiei ritè cogitato, quo, præter longitudinem, & latitudinem in superficie contentas, crassitudinem concipimus generari,

per

per quam *Corpus* constituitur mathematicum.

Monitum I. Omnia tamen hæc, non ut res per se subsistentes, sed solùm ut meras dimensiones, aut nudas quantitatis species, apprehendere oportet, ab omni subjecto penitus abstractas.

Monitum II. Nec præterea cùm dicimus: ex fluxu puncti lineam, ex fluxu lineæ superficiem, & ex fluxu superficiei corpus generari: propterea sequitur, ex solis punctis lineam, aut ex solis lineis superficiem, aut ex solis superficiebus Solidum constare. Quia cùm punctum ab Euclide definitum sit prorsus indivisibile, & si infinita puncta coacerventur, nec particulam unquam lineæ componere valebunt. Et similiter intelligito de lineis in superficie, & de Superficiebus in Solido. Unde recentiorum placita solùm convincunt, per hujusmodi motum seu fluxum, quoddam perpulchrum nobis suppeditari fundamen, quo commodiùs, atque faciliùs ad imaginationem totius continui gradatim, & quasi per generationem ejus specierum devenire valeamus.

Coroll. I. Continuum non constat ex solis indivisibilibus: indivisibile enim additum indivisibili nequit facere extensum, seu divisibile.

Coroll. II. Continuum componitur ex partibus, quæ sunt divisibiles in alias semper in infinitum syncathegorematicè divisibiles. In divisione quippe magnitudinis, *totum* in partes scinditur, quarum singulæ jam separatæ, cùm *tota* minora pariter evadant, similiter habebunt posse in partes dividi, harumque singulæ in alias, & ita consequenter in infinitum semper fieri poterit partium divisio.

Coroll. III. Continua dicuntur, quorum extrema sunt idem, & sic partes in magnitudine dicuntur continuæ.

Coroll. IV. Contigua dicuntur, quorum extrema sunt simul, nempe sub eodem puncto locante, cùm locans utrumque sit unum continuum. Hoc est duæ magnitudines dicuntur contiguæ, quæ sese tangunt secundùm extrema.

Coroll. V. Consequentia verò, sive *deinceps* esse, dicuntur ea, inter quæ non mediat aliquod ejusdem generis.

Coroll. VI. Genera dimensionis (sicut & magnitudinis) non sunt genera primò diversa, sed unum in altero includitur, prius scilicet in posteriore, non formaliter, sed materialiter, & præsuppositivè, ceu numeri quorum ternarius ver. gra. includit binarium, ternarius autem, & binarius simul includuntur in quaternario. nequit enim realiter haberi profunditas quin longitudinem,& latitudinem præsupponat. Et similiter linea includitur in superficie, superficies autem,& linea simul includuntur in solido; Sicut enim dari non potest latum quin longum: nec profundum dari quin longum, & latum sit; Ita pariter dari non potest linea,quin prius punctum intelligatur: nec superficies quin priorem habeat lineam; nec solidum dari quin includat utramque.

Coroll. VII. Linea non est *series punctorũ*: nec *superficies, juxta positio linearum*: nec *Solidum, complicatio superficierum*. Ut quidam, se Democriticos affectantes, inducere voluerunt, eo innixi fundamento, quòd in illorum sententiâ omnis etiam concreta magnitudo ex indivisibilibus seu athomis componatur. Nam dato, & non concesso hujusmodi fundamento, adhuc non sequitur, *lineam esse punctorum seriem*, &c. Etenim *quando Democritici dicunt, athomos indivisibiles esse*, (refert noster P. Guiduccius in censurâ sacræ Facult. Parisiensis *cap. 2.*) *id in eo asserunt sensu. scilicet esse indivisibiles non Mathematicè, sed physicè, videlicet accipi pro insectilibus physicis, seu corpusculis, in quæ Natura corpora grandiora ultimò resolvit, quæque, cùm ad ea perventum sit, irresolubilia deinceps indivisibiliaque existant*. Quæ quidem indivisibilitas non conceditur à suis authoribus athomo, *pro ut hæc partibus omninò careat, omnique destituatur intelligibili magnitudine, ac proinde nihil sit aliud, quàm punctum mathematicum*. Sed indivisibilitatem athomo addicunt in primis quia nihil inanis intra se ajunt contineri, ut supponunt inesse omni divisibili. Secundò *quia ita solida, dura, compactaque sit, ut divisionem, sectionem, & plagam subire nequeat, seu quòd nulla vis in naturâ sit, quæ illam dividere possit*. Et tandem quia ita exigua sit ut per se sola nullum sub sensum cadere valeat, proindeque *nul-*

lum in rerum naturâ instrumentum datur, quod illam frangere, dividere, partirique possit. Et in hoc sensu ajũt, athomos esse indivisibiles, mente solâ perceptibiles, insectiles &c. ut ipse textatur Epicurus apud Plut. 1. plac. 3. ab eodem Guiduccio relatus ibidem. *Dicitur athomus non quòd minima, scilicet ad instar puncti, sit, sed quòd non possit dividi, cùm sit patiendi incapax, & inanis expers; adeò ut dicens Athomum dicat id, quod & plagæ securum est, & pati nihil potest, & inanis est expers*. Quod quidem convinci non potest de puncto sive indivisibili mathematico, quod ita omni magnitudine expoliatur, ut nec per intellectum unquam divisibile concipiatur. Patet igitur, quòd nec Democriti rediviva sententia ullatenus horum suffragari videtur assertioni; quandoquidem licet dicatur continuum ex athomis constare, non propterea sequitur ex punctis, lineis, aut superficiebus, tamquam ex partibus, componi.

10 *Lineæ autem* extrema, *sunt puncta*. A puncto enim exorditur, & in punctum desinit. *Def. 3. 1.*

11 *Superficiei extrema, sunt lineæ*, vel linea. *Def. 6. 1.*

12 *Solidi autem extremum est* unica vel plures *superficies*. *Def. 2. 11.*

Scholium. Dixi (*lineæ vel linea*) in superficie: & (*unica vel plures superficies*) in corpore. Etenim est superficies, quæ ad *plures* terminatur lineas, ut est quælibet figura plana laterata, nempe Trilatera, Quadrilatera &c. Et est superficies, quæ ad *unicam* terminatur lineam, ut est quælibet figura plana rotunda; nempe Circulus, Ellipsis &c. Pari igitur modo est corpus, quod ad *plures* terminatur superficies; ut est quælibet figura solida angularis, nempe Pyramis, Prisma &c. Et est Corpus, quod ad *unicam* terminatur superficiem; ut est quælibet figura solida rotunda, nempe Sphæra, Ovale &c. de quibus singulis infra suo loco. Unde autem sumatur hujusmodi extremorum pluralitas, habetur etiam infra.

13 Porrò magnitudinis species nonnullas indispensabiliter induere solent passiones, quarum quædam (ut infra dicetur) sunt primæ ac propriæ ipsarum passiones: & propterea *per se* illis competere dicuntur: aliæ

verò

verò sunt secundariæ, & relativæ; ideoq; *secundùm accidens* seu *respectivè* eis convenire dicuntur.

14 Quare *Linea*, & *Superficies* dupliciter considerantur, videlicet: *secundùm se*, & *secundùm accidens*.

15 Linea *secundùm se*, vel est *recta*, vel *curva*.

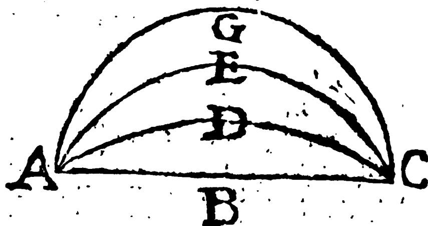
16 Linea *secundùm accidens*, vel est *perpendicularis*, vel *obliqua*, vel *parallela*.

17 Superficies autem *secundùm se*, vel est *plana*, vel *curva*, vel *mixta*.

18 Superficies verò *secundùm accidens* similiter, vel est *perpendicularis*, vel *obliqua*, vel *parallela*.

19 *Linea igitur recta est, quæ ex æquo sua interjacet puncta*: hoc est brevissima linearum eosdem terminos habentium, utpote quæ à puncto ad punctum brevissimè ducitur, ipsa terminativa puncta intermediis æquali positione connectens. Vel est ea, cujus *extrema* obumbrant omnia *media*. Ut est ver. gra. linea ABC quæ brevissimè extenditur inter puncta A & C. Proclus hanc Euclidis definitionem exponens ait: *tunc demùm dicimus lineam aliquam ex æquo sua interjacere puncta, quando æquale spatium occupat ei, quod inter sua sitũ est puncta extrema*: ut linea ABC dicitur recta, quia tantum occupat præcisè spatium, quanta est vera seu brevissima distantia, ex puncto A

Def. 4. 1.



ad punctum C. Non autem sic de lineis ADC; AEC, quæ non sunt rectæ, cùm longiora seu majora obtineant spatia, quàm sit brevissima extremorum punctorum A & C distantia. Et sic etiam patebit, omnia puncta lineæ ABC, (inter quæ est punctum B,) *æqualiter inter extrema* A & C *jacere*, juxtà *Euclidis*

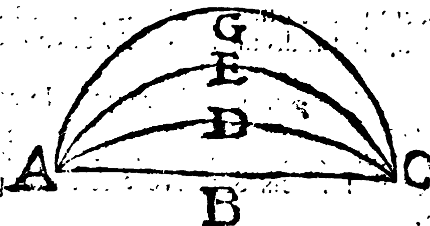
de-

definitionem, quod non videtur in aliis lineis, ubi puncta D, E, G subsultant ab extremorum A & C. positione.

Coroll. I. Quæcumque distantia inter duo data puncta mensuratur per lineam rectam, quæ est omnium brevissima.

Coroll. II. Cùm à dato puncto in datum quodcumque punctum unica sit brevissima via, fit, quod nequit dari linea rectior rectâ; sed quotquot ab eodem puncto ad idem punctum infinitæ ducantur lineæ rectæ, omnes in unam penitus eamdemque rectam lineam coincident, quâ proinde brevior dari non potest.

20 Linea igitur *Curva* est, quæ *nō ex æquo* sua *interjacet puncta*: hoc est, quæ non brevissimè extenditur inter datos terminos A & C; adeòque semper eâ brevior dari potest. Vel quæ non est recta. Ut lineæ A D C, A E C, quarum una est brevior alterâ, & utraque brevior est A B C, quæ si fuerit omnium brevissima, recta dicetur.

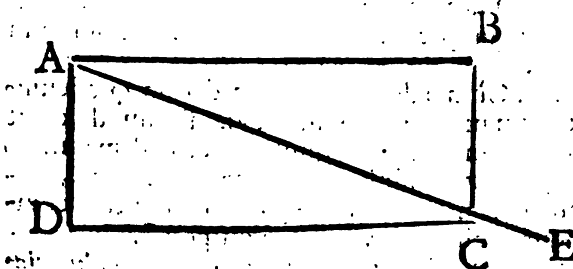


21 Linea autem Curva habet dici *Regularis*, & *Irregularis*, prout ordinem dicit ad figuram tum *Regularem*, tum *Irregularem* (infra suo loco), cujus aut extremum sit, aut limes, aut aliquid aliud ad ipsam spectans figuram. Ut linea *Circularis*, *Elliptica*, *Hyperbolica*, *Parabolica*, *Cochlearia* &c.

22 *Superficies plana est, quæ ex æquo suas interjacet lineas*: hoc est cujus omnes partes adæquatè commensurari possunt unicâ rectâ lineâ. Ut in superficie A B C D, si linea recta A E, fixo manente extremo A, velut è centro, in gyrum manuducta per alterum Def. 7. 1.

 exi-

extremum E, adequatè contingeret, & commensuraret omnes ipsius superficiei partes; talis erit plana superficies. Vel cujus extrema obumbrant omnia media.



23 Superficies verò *Curva* per contrariam explicatur definitionem. Est enim quæ *non ex æquo* suas *interjacet* lineas: hoc est cujus media subsultant ab extremis.

24 Curva autem superficies habet adhuc dici, & Curva *simpliciter*, & Curva *secundùm quid*.

25 Superficies *simpliciter* curva dicitur illa, quæ nullâ ex parte, potest lineâ rectâ adæquatè commensurari, quæ tamen subdividitur in *Convexam*, & *concavam*.

26 Superficies *concava* dicitur, quando consideratur ejus *curvitas* ex eâ parte, quâ superficies ad seipsam circumflectitur, & inclinatur. Ut superficies intima Cœli, dolii, fornicis &c. sive altera non plana ex parte intùs.

27 *Convexa* verò superficies è contra dicitur, quando consideratur ejus *curvitas* ex eâ parte, quâ intermedia subsultant ab extremis. Ut est extima superficies ultimi Cœli, Dolii, Ovi &c. sive alia non plana ex parte foris.

28 Superficies Curva *secundùm quid* dicitur illa, quæ ex aliqua parte potest lineâ rectâ commensurari, ex alterâ verò non. Ut Superficies *Cylindrica*, *Conica* &c.

29 Superficies *mixta* dicitur, quæ partìm plana est, & partìm Curva.

30 Superficies autem *Curva*, & *mixta* habent dici *Regulares*, & *Irregulares*, eo pari modo, ac de lineâ est dictum.

Por-

31 Porrò *Rectitudo*, & *Curvitas* Passiones *Lineæ*, sicuti *Planities*, & *Curvitas* Passiones *Superficiei*, dicuntur *per se* competere lineæ, & Superficici, utpotè quæ ab eis nequeunt ullo modo separari. Siquidem non potest assignari *linea*, nec cogitari, quin aut *recta* sit, aut *Curva*; sicuti nec *superficies*, quin aut *plana* sit, aut *Curva*. Unde *Rectitudo*, aut *Curvitas* inseparabiliter magnitudinem comitantur, etiam solitariè sumptam, nullo scilicet habito ad aliam respectu, proindeque dicuntur *primæ*, ac *propriæ* Passiones *lineæ*, imò *propriissimæ*, ut docent Philosophi, quemadmodum *par*, & *impar* sunt propriæ, ac propriissimæ passiones *numeri* (idem prorsus intelligito de *planitie*, & *Curvitate* erga *Superficiem*): Sicut enim impar est numerus non habens medium: & è converso par est numerus medium habens; Ita *rectum* dicitur de *lineâ*, quæ ex æquo sua interjacet puncta: & è converso *Curvum* dicitur de *lineâ*, quæ non ex æquo sua interjacet puncta. Igitur *linea* ponitur in definitione *recti*, ut subjectum ponitur in definitione propriæ passionis, scilicet pro ut *numerus* ponitur in definitione *paris* aut *imparis*: vel pro ut *nasus* in definitione *simi*, vel *Capillus* in definitione *Crispi*. Cæterum, quia sunt adeò cum eâ connexæ, ut dictum est, ut ubicumque percipiatur linea, necessariò aut rectam, aut Curvam imaginari ipsam oportet, propterea assumendæ sunt tanquam essentiales lineæ *proprietates*, non rigorosè, sed pro ut *primæ*, & *impræscindibiles* ejus *passiones*, atque ab eâ nullatenus separabiles. Idemque prorsus dicito de Planitie, & Curvitate erga Superficiem.

32 Præterea sæpè occurrit ab authoribus *Rectam* absolutè pro lineâ rectâ: & *Planum* absolutè pro superficie planâ substantivè usurpari; dicentes igitur verbi grat: *Recta* super *Rectâ* consistens &c. vel Pyramis est figura solida quatuor sub *planis* comprehensa; idem esse intelligi volunt, ac si diceretur: *linea recta* super *lineâ rectâ* consistens &c. Vel Pyramis est figura solida sub quatuor *planis superficiebus* comprehensa.

De superficie autem, & lineâ *secundùm accidens* sermonem differimus, usque quòd nonnulla de angulis, quæ ad clariorem ipsarummet intelligentiam præno-

ſci eſt opus, expenderimus.

Coroll. I. Linea *recta* non poteſt eſſe *curva*, nec proinde linea *curva* poteſt eſſe *recta*. Sese enim ad invicem contrariantur penes eumdem eſſendi modum, ſcilicet *ſecundum ſe*: Unde incommenſurabiles evadunt. Hinc celeberrima ad ævum uſque noſtrum pro circuli quadraturâ inveniendâ, tot ſæculis quàm veterata ſapientum defatigatio: Diù enim conati ſemper ſunt, aliquam *rationalem* adinvenire Rationem inter curvam, & rectam, qua expreſsè comparari valeant; ut ſcilicet ex notâ *recta* quantitate, exacta quoque *Curvæ* longitudo ſcientificè innoteſceret, quod Circuli quadratura ſignificat; Sed hactenus fruſtrà. Nam, & ſi multos admirabili refertos eruditione libros nobis reliquerint, labori non pepercerint: nihilque impervium remanſerit; adhuc tamen agitantur ſcholæ, contendunt Magiſtri, doctus orbis expectat. Nec aliud, præter approximationem ab Archimede lucubratam, Rationem ſcilicet triplam ſeſquiſeptimam, quidpiam uſque modò nacti ſunt: quæ nihilominus fabrile opus abſque ſenſibili errore ſatis juvat.

Quoniam autem ex mutuo contactu, interſectione, aut concurſu duarum magnitudinum, conſurgit Angulus: Sicuti ex circumſcriptione, concluſione, aut comprehenſione magnitudinis, conſurgit Figura; haud incongruum de iis erit iuire ſermonem. Unde ſit.

CA

CAPUT QUARTUM

De Angulis.

§. I.

De Angulo in genere.

1 ANguli nomine absolutè venit id, quod resultat ex mutuâ ullarum magnitudinum, non in directum jacentium, sive unius ad seipsam, inclinatione, quâ fit aliqua magnitudo ex alterâ parte in puncto collecta, & terminata, ex alterâ verò parte sub certo valore in amplitudinem surgens.

2 In hac definitione omnia ferè conclusimus, quæ ad naturam anguli spectandam principalitèr, & genericè pertinere videntur, quam tamen pro singulis ejus particulis explicabimus.

3 In primis enim dicitur (*quod resultat ex mutuâ ullarum magnitudinum, non in directum jacentium, vel unius ad seipsam inclinatione.*) Est enim angulus, qui fit *ex unica* magnitudine; & angulus qui fit ex *duabus* magnitudinibus; & angulus, qui fit ex *pluribus* magnitudinibus. In omnibus tamen par esse debet inclinationis ratio. Nam ubi angulus fit ex *duabus*, aut pluribus magnitudinibus, oportet quòd *una* sit *alteri* adeò *inclinata*, ut ad aliquem communem contactum secundùm proprias extensiones, sive *actu*, sive *potentiâ*, mutuò concurrant. Non verò *in directum jacentes*. Siquidem in directum jacere dicimus ver: gra: duas lineas E I, I F, quando in extremis ita sese tangunt, quòd non ampliùs duæ manere, sed unicam videantur tantùm rectam componere lineam E F: quo pacto, nec pluralitas remanet linearum ab hujusmodi angulo requisita, nec inclinatio magnitudinum ad ipsum necessaria. Dixi, *sive actu*, *sive potentiâ*: quia ad veritatem anguli sufficit, quòd magnitudines invicem inclinatæ, licèt aliquando non videantur *actu* sese con-

tin-

tingere, *possint* tamen ad mutuum convenire contactum, si secundum proprias extensiones producantur.

E I F

4 Ubi verò angulus fit ex unā tantùm magnitudine, oportet, quòd ipsa sit *ad seipsam inclinata*: quod solùm de superficie curvâ verificari potest: videlicet quādo in suâ curvitate adeò in seipsam circumflectitur, ut ex alterâ parte in unum fastigiari videatur, & colligi atque confluere punctum.

5 Item dicitur (*qua sit aliqua magnitudo*). Cùm enim præcedentes particulæ potiùs angulum *causaliter*, quàm *formaliter*, explicare videantur: inclinationem scilicet magnitudinum, per quam angulus causatur; ideò sequentes apponuntur, quibus id aperitur, in quo *formaliter* consistere censetur angulus; videlicet in aliquâ magnitudine, quæ ab illis inclinatis intercipi debet. Sumitur enim formaliter angulus non pro puncto concursùs magnitudinum sese ad invicem inclinantium, nec pro ipsismet inclinatis, sed pro magnitudine seu spatio ab eis intercepto, mensurabili quidem sub certo valore. Quod pulcherrimè exemplificatur per præfatum *motum* seu *fluxum*, quem facere cogitentur ver: gra: duæ lineæ rectæ: nam si istæ duæ lineæ priùs intelligantur ita simul congruere, ut secundum se totas sese contingerent; postea verò ab invicem ita disjungātur, ut tamen maneant semper ex aliquo communi extremo simul annexæ; jam videtur eas aliquod superficiale spatium satis describere inter ipsam interceptum, quod si mensurabile consideretur tantummodo per arcum, sicut infra docetur: hoc erit, quod *formaliter* angulus importat.

6 Propterea subditur (*ex alterâ parte in puncto collecta, & terminata.*) Illa enim magnitudo, in qua dicitur *formaliter* angulus consistere, debet ex unâ parte in unum confluere atque colligi *punctum*, ubi scilicet fit magnitudinum contactus. Si enim non fieret hæc superficiei vel corporis in puncto collectio, evidenter pateret, nullum ibi adesse angulum, quia magnitudines

nul-

nullo pacto tunc essent mutuò inclinatæ: quandoquidem inclinatio est propria causa angulum efficiens, ut mox dicetur.

7 Et tandem dicitur (*ex alterâ verò parte sub certo valore in amplitudinem surgens*). Nam magnitudo, in qua *formaliter* consistit angulus, sub ratione anguli præcisè, non debet undique conterminari, & circumcludi: cùm hoc solùm ad figuram requiratur, ut suo loco dicetur, nõ verò ad angulum. Quinimò angulus sicut exposcit limitationem, & conterminationem ex eâ parte quâ magnitudines angulum causantes mutuò inclinantur, ut dictum est; ita petit, ac exigit disterminationem, & amplitudinem ex alterâ, in qua magnitudines evadunt ab invicem remotiores, prout sunt in se ipsis longiores. Hæc autem inclinatio magnitudinum angulum causantium, seu amplitudo ista magnitudinis interceptæ, in qua *formaliter* angulum consistere dicimus, mensurari non debet secundùm *materialem* partium extensionem, benè verò sub certo determinari valore, ex solâ quantitate arcûs inter illas intercepti, qui major erit aut minor, prout scilicet major, aut minor fuerit mutua earumdem inclinatio, sicut infra docebitur, cùm de valore anguli tractabimus. Angulus igitur in genere dupliciter considerari potest ex dictis, nimirum, *causaliter*, & *formaliter*.

8 Angulus *causaliter* supponit pro causâ angulum *efficiente*, quæ est magnitudinum inclinatio seu concursus ad mutuum contactum. Sicque definitur: est mutua magnitudinum, vel unius ad seipsam, in puncto se tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. Quæ magnitudines necessariò debent esse aut *lineæ*, aut *superficies*.

9 Angulus *formaliter* supponit pro magnitudine illâ seu spatio à concurrentibus clauso; quem sic definimus: est magnitudo, ex altera parte à magnitudinibus sive unicâ ad seipsam, mutuò inclinatis, atque in puncto se tangentibus intercepta; ex alterâ verò parte sub certo valore in amplitudinem surgens. Quæ quidem magnitudo necessariò debet esse aut *superficies*, aut *Corpus*.

10 *Latera* anguli sunt duæ illæ magnitudines angu-

gu-

angulum conficientes, & causantes; quæ & *crura* interdum dicuntur: suntque necessariò vel *lineæ*, vel *superficies*.

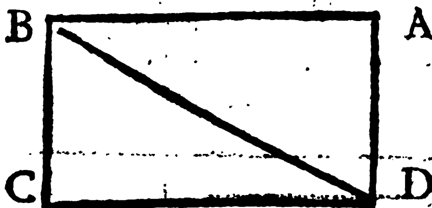
11 *Apex* anguli dicitur *punctum* illud, in quo magnitudines angulum causantes ad mutuum contactum collectivè concurrunt: quod & *Vertex*, & aliquando *centrum* anguli vocari solet.

12 *Valor* anguli est mensura anguli, videlicet quantitas mutuæ inclinationis linearum angulum conficientium, quæ quidem desumitur ex solâ quantitate cujusvis *arcus* ex ejus apice velut è centro inter latera descripti, in gradus, & minuta, prout arcus ipse fuerit major vel minor pars circuli, cujus est arcus. Ut in angulo A B C arcus quicumque A C descriptus è centro B est anguli valor seu mensura. De quo tamen fusius infra, postquàm circuli naturam explanavimus.

13 Tres communiter litteras tanquam ciffras adhibere solent Mathesiphili, dum angulum quemquam singulariter nominare velint, non minùs, ac in appellatione Trianguli passim fieri solet; Sed hoc cum discrimine; quòd ubi in triangulo singula quælibet ciffra denotat angulum; in singularis verò anguli designatione, *media* semper littera vel ciffra angulum indicat, de quo est sermo; cùm reliquæ duæ solùm distinguant à quibus magnitudinibus ille causetur: Videlicet si in quâvis figurâ A B C D aliquem velimus nominare angulum, putà qui fit in centro B, ubi à lineis A B, C B causatum, tribus semper litteris A B C eum appellamus, ex quibus media tantùm littera B angulum ostendit, de quo est sermo, utpotè qui à lineis A B, C B, & non à lineis A B, D B causatur. Et similiter

dum

dum velimus nominare angulum, qui fit in puncto C;

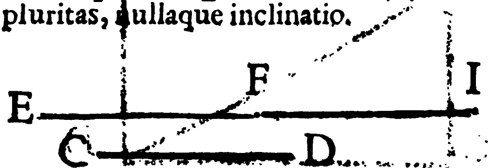


eum tribus pariter ciffris vocabimus angulum B C D, velut à lineis *B* C, D C causatum; ex quibus tantùm media C angulum designat, de quo est sermo. Possunt tamen in *respectivorum* appellatione angulorum ita ordinatè disponi ciffræ, angulos nominantes, ut ex solâ nominis ipsius vi, idest ex solâ ciffrarum ordinatione, statim innotescat angulorum relatio. Ut infra suo loco insinuabimus.

Coroll. I. Magnitudines sibi invicem *æquidistantes* angulum causare non possunt. Quamdiù enim eamdem servant inter se distantiam, & si in infinitum protrahantur, numquam ad mutuum queunt contactum convenire, nec proinde fieri inclinatæ; quod specialiter requiritur ad anguli constitutionem, ut diximus in traditâ definitione. Ut lineæ infra positæ E F, C D, quæ, si æqualem ab invicem distantiam habuerint omni ex parte, neutram in partem ad mutuum contactum, nec *potentiâ*, nec *actu* convenire poterunt; Sicque nullum angulum efformare valebunt: dicuntur enim inter se *parallelæ*, ut mox cum Euclide docebimus.

Coroll. II. Magnitudines in *directum jacentes* nullum pariter causant angulum: utpotè quæ, licèt ad mutuum videantur convenire contactum, quia tamen sub unicam simul ambæ censentur longam coincidere extensionem, unamque tantùm rectam ver: gra: componere magnitudinem, mutuâ prorsus omni carent inclinatione, atque adeò angulum efficere non valent, qui à mutuâ magnitudinum, sive unius ad seipsam, inclina-

tione causari necessariò debet. Ut patet de lineis EF, FI, quæ sunt *in directum jacentes*: componunt enim unicam rectam lineam EI, proindeque ex earum positione nullus potest angulus resultare, quia nulla est earum pluritas, nullaque inclinatio.

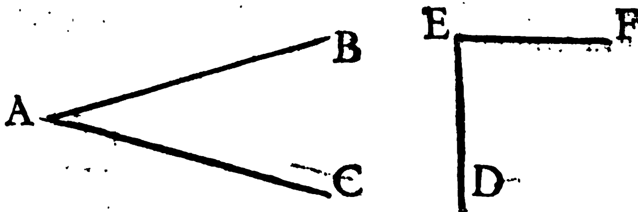


Coroll. III. Magnitudines *nulliter inclinatæ* nullum causant angulum. Siquidem vel concurrunt ad mutuum contactum, vel non. Si non concurrunt, non constituunt angulum; quia *æquidistantes* erunt, ut lineæ EF; CD in superiore exemplo; Si concurrunt, non constituunt angulum, quia sunt in *directum jacentes*, ut lineæ EF, FI.

Coroll. IV. Rectæ magnitudines videlicet duæ rectæ lineæ AB, AC angulum constituentes in puncto A ex eâ parte, qua in amplitudinem surgunt, quantò fiunt in seipsis longiores, tantò ab invicem distantiores evadunt. Unde si in infinitum ab anguli puncto A recederent, in infinitum pariter inter se distarent. Nec officit quod solent aliqui subtiliter hic opponere: distantiam scilicet, quæ inter eas etiam in infinitum protensas supponitur, finitæ semper, ac limitatæ conditionis esse debere. Nam nulla dari posset transversalis linea inter duas illas, quæ finita non esset: utpotè quæ numquam prædictas magnitudines excedere valeret, sed perpetuò ab iis intercipi, ac inter ipsas velut à limitibus, quos ultrogredi unquam nequeat, vallari necessariò intelligatur. Vel secundò: in hac hypothesi dari infinitum majus alio. Ut in minore angulo BAC ubi distantia BC in quacumque suppositione semper erit minor utrâlibet AB, aut AC. Et è contra in majore angulo DEF ubi distantia DF semper major erit utrâlibet ED, EF. Non inquam officit. Nam in primis, si ritè intelligatur hæc longa rectarum magnitudinum angulum constituentium infinita protensio, quæ omnem excedit imaginabilem

lon-

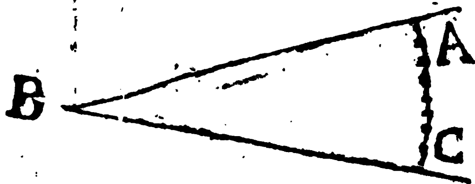
longitudinem, atque omnem excludit terminationem; perspicuum erit nullos assignari posse terminos, ex quibus necessariò concipienda sit ipsarum distantia.



Supponuntur enim illæ ex aliquo dato puncto A angulariter in infinitum protrahi, & consequenter nullos habere terminos ad partes C & B, ob propriam longitudinis infinitatem; atque adeò nulla videtur concedibilis interesse, præter infinitam, distantia, ob terminorum defectum; Unde infinita quoque evaderet linea illa transversalis, quæ distantiam infinitam adæquare deberet. Immo fortiùs dicendum, talem lineam non solùm esse infinitam, verùm etiam & prioribus, ut ita dicam, infinitiorem: cùm in eodem longitudinis ordine hæc foret *simpliciter* infinita, utroque nempè carens extremo, initio videlicet & fine, illæ verò infinitæ dicantur *secundùm quid*, utpotè quæ licet ad posteriores partes A & C in infinitum supponantur protractæ, initium tamen sumunt ex anguli apice A. Unde argumentum suam haberet vim contra asserentes, dari posse corpus *actu* infinitum. Ubi tamen gravius oriretur absurdum: hujusmodi scilicet distantiā finitā simul esse & infinitā, ob rationes adductas. Et similiter ad secundum. Infiniti ratio formalis est, quòd terminis careat; atque adeò infinita in eo ordine, quo sunt infinita, sunt *formaliter* idem. Unde inæqualitas illa distantiarum in hypothesi nullum infert inconveniens pro inæqualitate infinitorum, sed tantùm *de materiali* se habet. Sicuti si mundi duratio esset æterna, nonne major foret numerus dierum, quàm annorum, & major horarum, quàm dierum; & tamen omnes essent numeri ex suppositione infiniti; ergo nil officit.

Coroll. V. Patet igitur in angulo tria principaliter at-

tendenda: nempe *Latera*, *Verticem*, & *Valorem*. Ut in angulo quocumque A B C; lineæ A B, C B, sunt *latera*; punctum B est *vertex* seu *centrum* seu *apex* anguli; arcus verò A C è centro B. inter utrumque latus descriptus, est *valor* anguli A B C.



§. II.

De Angulo in Specie.

1 Angulus primariè dividi solet in *planum*, & *solidum*.

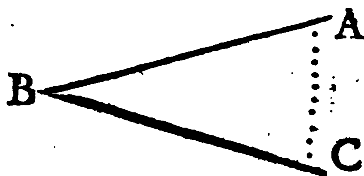
Def. 8. 1. 2 *Planus angulus*, quem causaliter hìc cum Euclide definimus, *est duarum linearum in Plano se mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio*.

3 Angulus verò planus formaliter sumptus, est spatium illud seu superficies, ex alterâ parte in puncto collecta, & à duabus lineis ad se invicem inclinatis, intercepta: ex alterâ verò sub certo valore in amplitudinem surgens. Ut inclinatio quam ad se invicem habent lineæ A B, B C in puncto B se tangentes, & non indirectum jacentes, dicitur *causare* angulum ABC, qui *formaliter* consistit in superficie ABC (*supra n. 5. praced. §.*), ex alterâ parte B ab illis lineis AB, CB intercepta, ex altera verò AC sub certo *valore* A C in amplitudinem surgens.

4 Anguli plani *latera* semper sunt *duæ* illæ *lineæ* ad se invicem inclinatæ angulum ex alterâ parte in puncto colligentes. Ut A B, C B.

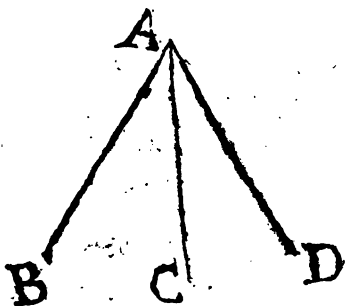
An-

5 Anguli plani *vertex*, seu *apex*, sive *centrum*, punctum est, ubi latera mutuò sese contingunt. Ut punctum B.



6 *Solidus angulus* (quem primò idest *causaliter* Euclides definit) *est, plurium quàm duarum linearum, quæ se mutuò contingant, nec in eâdem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.* Def. 11. 11.

7 *Solidus angulus* (quem secundò idest *formaliter* definit) *est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis, in eodem non consistentibus Plano, sed ad unum punctum constitutis seu collectis, continetur.* Ut inclinatio, quam ad se invicem habeant saltem tres lineæ BA, CA, DA, non in eodem Plano existentes, angulum dicitur ad punctum communis contactùs A *causare* solidum, qui *formaliter* consistit in eâ crassitudine seu spatio, quod ex alterâ parte à tribus angulis planis BAC, CAD, DAB, quos lineæ illæ ad unũ punctum A colligerent, continetur. Debent autem lineæ non in eâdem superficie seu Plano consistere: alio- *Aliter ibi.*



quin

quia non *solidus* ad punctum A efformaretur angulus, benè verò *planus*, tamquam ex duobus planis angulis B A C, C A D compositus. Idem etiam intelligito si plures fuerint lineæ, aut plani anguli, ad solidum angulum efformandum, concurrentes.

Sed animadvertas oportet, sub hac definitione nec *Coni*, nec *Semiconi*, angulum comprehendi: primus enim fit ex unicâ superficie ad seipsam inclinatâ, alter verò ex curvâ, & planâ causatur; de quibus infra.

8 Solidi anguli *latera* sunt Plana illa diversa ad unum punctum collecta.

9 Solidi anguli *vertex* seu *apex* sive *centrum* est punctum illud in quod ejus latera confluunt. Ut punctum A in allato exemplo.

Monitum I. Quæ de plano Angulo hìc dicentur, debitâ angulorum naturâ conspectâ, ac ratione servatâ, facilè & de solido quoque angulo intelligi possunt; Siquidem angulus solidus passim sub consideratione *plani* anguli revocatur, ut ejus mensura seu valor innotescat. Propterea nonnisi de *plano* angulo nobis hìc sermo erit, volentibus eadem ferè pro *solido* observari cum debito discrimine.

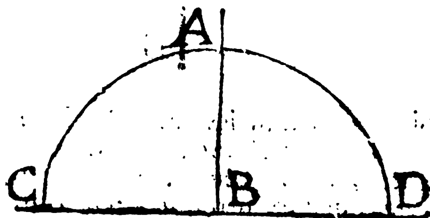
Digressio

De perpendicularibus, Obliquis, & parallelis magnitudinibus.

10 Lineam, & superficiem, suprà diximus, *secundùm accidens*, seu respectivè dividi in *Perpendicularem*, *Obliquam*, & *Parallelam*.

11 Lineas *perpendiculares* sic definit Euclides:
Def. 10. 1. *Cùm verò recta linea super rectam consistens lineam, eos qui sunt deinceps* (seu *hinc inde*) *angulos æquales inter se fecerit: rectus est uterque æqualium angulorum, & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ejus cui insistit*. Hoc est lineæ *perpendiculares* dicuntur, quando una in alteram incidens, duos ex utroque latere causat *angulos æquales*; qui *recti* censentur, si singulorum va-

valor fuerit *quadrans Circuli*, ut infrà dicetur. Tunc autem ambæ dici habent invicem perpendiculares. Ut linea A B dicitur perpendicularis ad lineam CD, quia duos cum illâ causat angulos A B C, A B D, æquales, qui recti sunt, cùm singulorum valor circuli quadran-



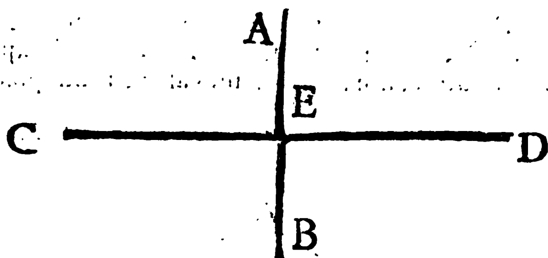
tem adæquet. Et similiter linea C D dicitur perpendicularis ad lineam A B; quia potens est cum illâ duos causare angulos *hincinde* æquales, quorum unus actu existit, nempe angulum A B D; alter verò consurget utique, si recta A B ultrò producatur ad partes B.

12 Esse autem perpendiculare duarum linearum consistit in puncto; nam ad minimam earum divariationem funditùs destruitur angulorum æqualitas, in qua sanè consistit totum esse perpendiculare ipsarum.

13 Æqualitas autem, aut inæqualitas angulorum non desumitur ex eo quòd unus æqualia, aut inæqualia, similia, aut dissimilia, obtineat cum altero latera; sed attenditur solùm ex hoc, quòd par sit in angulis mutua laterum inclinatio, quæ est anguli *valor*. Unde æquales anguli censentur illi, in quibus par seu eadem est mutua laterum inclinatio: hoc est qui sunt æqualis valoris; de quo tamen fusiùs infrà.

14 *Sectio Orthogonalis*, seu (ut dicitur) *ad angulos rectos*, fit, quando linea, lineam intersecans, quatuor angulos causat omnes sibi invicem æquales. Ut rectæ lineæ A B, C D *orthogonaliter*, seu ad angulos rectos, invicem intersecari dicuntur in puncto E; quia quatuor

tuor causant angulos CEB, BED, DEA, AEC,

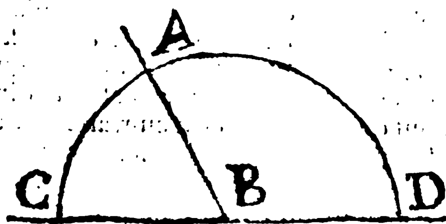


omnes sibi invicem æquales, nempè *rectos*; sunt enim quatuor ejusdem *circuli quadrantes*.

15 Lineæ *obliquæ* dicuntur: quando una in alteram incidens duos ex utroque latere causat *angulos inæquales*. Tunc autem ambæ dici habent invicem obliquæ, sicut & de *perpendicularibus* est dictum. Ut linea AB dicitur obliqua ad lineam CD, & è converso: causant enim angulos ABC, ABD. inæquales, quorum unus dicitur *Obtusus*, alter verò *Acutus*, ambo tamen etiam obliqui dicuntur.

Def. 11. 1. 16 *Obtusus angulus est, qui recto major est*. Ut ABD.

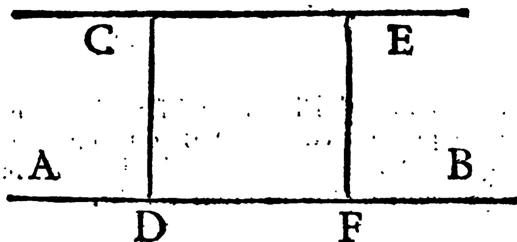
Def. 12. 1. 17 *Acutus verò qui minor est* recto. Ut ABC.



Def. 35. 1. 18 *Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ, cùm in eodem sint Plano* (supra n. 32. cap. 3.), *& ex utraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuò incidunt*. Hoc est lineæ *parallelæ* dicũtur, quæ cùm in eâdem planâ superficie existant, quantumvis producan-

tur,

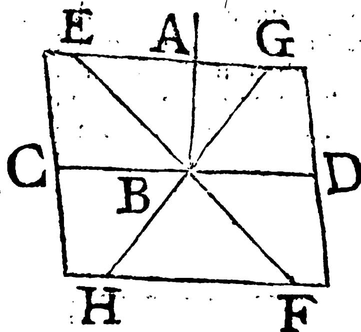
tur, neutram in partem coincident, sed *æquali* semper *intervallo* inter se distabunt: unde *æquidistantes* vocantur. Equalia verùm intervalla desumuntur in rectis perpendicularibus; unde si lineæ CD, EF sint æquales, & perpendiculares ad datam AB, sequitur, lineam CE generatã esse parallelam ad AB. Nam si linea CD, vel EF, intelligatur perpendiculariter moveri super rectam AB, tunc ejus extremum C describet lineam CE, pari ubique intervallo à lineâ AB distantem.



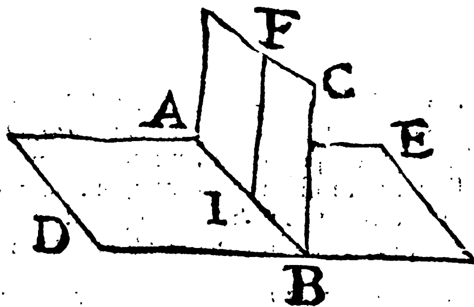
19 Linea verò, quæ *Plano Horizontali* sit parallela, dicitur *Horizontalis*. *Planum* autem *horizontale* hic voco illam Terraquei superficiem, cui nos & omnes muri perpendiculariter insistere videmur, quæ licet re verâ Sphærica sit (ob ea, quæ in Sphærologiâ demonstrantur,) tamen quò ad sensum plana absque ullo errore putatur.

20 *Linea recta est ad Planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt Plano, rectos angulos efficit.* Ut linea AB dicitur *recta* ad Planum seu ad planã superficiem EGFH, si ad omnes rectas lineas in eodem Plano existentes, atque per punctum B ductas, quales sunt CD, EF, Def. 3. 11.

G H, fuerit perpendicularis; ita ut anguli A B E, & A B F: A B G, & A B H sint æquales seu *recti*.



21 *Communis* Planorum *sectio*, est *linea* existens in utroque plano, qualis est A B, quæ est tam in plano A C, quàm in plano D E: ubi scilicet Plana illa mutuò se secant, vel unum alteri insistit.

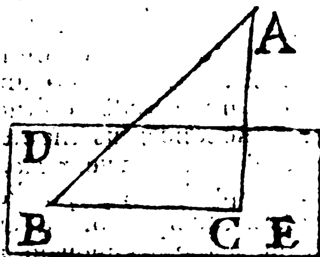


Def. 4. 11. 22 *Planum ad Planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi Planorum sectioni ad rectos angulos in uno Planorum ducuntur, alteri Plano ad rectos sunt*

an-

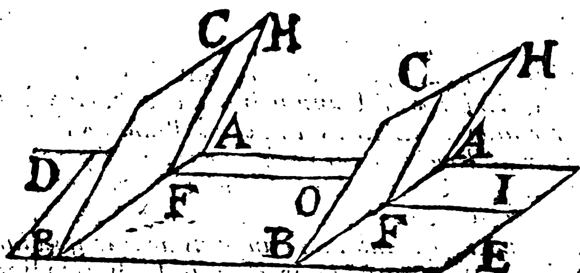
angulos. Hoc eſt, quando duæ planæ ſuperficies, ut DE, AC, ſibi invicem perpendiculariter inſiſtunt; Ubi neceſſe eſt, rectas omnes velut FI, in Plano AC exiſtentes, quæ perpendiculariter inſiſtunt communi Planorum ſectioni AB, perpendiculares etiam eſſe ſeu rectas (*ſupra n.* 20.) ad *planum* alterum DE.

23 *Rectæ lineæ ad Planum inclinatio eſt: cùm à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad Planum deducta fuerit perpendicularis: atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo Plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt Plano, altera recta linea fuerit adjuncta; eſt, inquam, angulus acutus ipſâ inſiſtente lineâ, & adjunctâ comprehenſus.* Ut ſi recta linea AB obliquè inſiſtat Plano DE, & ab ejus ſublimi termino A ad Planum deducta fuerit perpendicularis AC ſeu recta (*ſuprà n.* 20.) duoq; puncta in Plano exiſtentia B, & C, jungantur rectâ BC; erit planus angulus acutus ABC inclinatio rectæ AB ad Planum DE. *Def.* 5. 11.



24 *Plani ad Planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque Planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.* Ut ſi plana ſuperficies BH obliquè inſiſtat alteri planæ ſuperficiei DE, ut in utroque Plano duæ rectæ CF, IF ad communem Planorum ſectionem AB perpendiculariter ductæ, angu- *Def.* 6. 11.

lum inter se causarent recto minorem C F I, erit talis angulus acutus definita inclinatio Plani ad Planum.



Def. 7. 11. 25 *Planum ad Planum similiter inclinatum esse, atque alterum ad alterum, dicitur: cùm dicti inclinationum anguli inter se sunt æquales.* Ut æquales anguli C F O, C F I clarè ostendunt, Plana illa B F, B H *similiter* inclinata esse ad Planum D E.

Def. 8. 11. 26 *Parallela Plana sunt, quæ inter se non conveniunt.* Ut patet ex dictis *suprà n.* 18.

27 *Perpendicularitas, Obliquitas, & Paralleleitas,* & aliæ hujusmodi passiones, *per accidens* dicuntur competere lineæ, & superficiei, eò quia solùm explicant naturam *habitudinis* seu *respectùs*, quo una linea verbi gra: refertur ad aliam, unde facilè possunt ab ea præscindi. Salvatur namque conceptus lineæ, aut superficiei *secundùm se* consideratæ, putà vel *rectæ*, sive *planæ*, vel *curvæ*, absque eo quòd illas *perpendiculares* aut *obliquas*, aut *parallelas* concipi oporteat. Unde hujusmodi passiones assumendæ sunt tamquam *proprietates secundariæ, extrinsecæ, & relativæ*, vel tamquam *habitudines*, quibus magnitudines mutuò referuntur, & sese dicunt ad invicem.

28 Cæterùm ex passionibus tum primariis, tùm secundariis, tum propriis, tum relativis, quæ magnitudinis genera comitari solent, quædam videntur cæteris præstantiores, tum quia simplicissimè, & indivisibiliter in suo esse consistunt, tum quia digniorem, ac perfectiorem principalibus matheseos usibus reddunt magnitudinem. Et ideò *Dignitates* methaphoricè eas hic

vo-

vocare non dedecet; sicut & cæteras, penès majorem, aut minorem à Dignitate recessum, *Lationes* placeat nominare.

29 *Dignitates* ergo nominamus passiones illas, quæ magnitudinem ponunt sub aliquo statu, quò magnitudo indivisibiliter talis dici censetur: unde *perfectionem* important, quæ ut Dignitas nuncupetur, *nullam* admittere debet *amplitudinem* sui esse divisibilem *secundùm magis, & minùs*; sed tota debet *indivisibiliter* consistere; adeò ut magnitudo tali prædita affectione indivisibiliter talis dici ostendatur: ex quo dignior, utilior, & regularior ejus redditur usus in omnibus mathematicis disciplinis. Sicque *Rectitudo* lineæ aut *Planities* superficiei, nec non & *Perpendicularitas*, & *Parralleleitas* utriusque, dicuntur *Dignitates*, quia indivisibiliter in suo esse consistunt: hoc est nullam admittunt amplitudinem sui status seu perfectionis divisibilem secundùm magis, & minùs; sed totam suæ perfectionis plenitudinem magnitudini indivisibiliter conferunt.

Nulla namque linea dari potest *rectior* alterâ *rectâ*, nec superficies *planior* aliâ *planâ*; Sed sicut inter duo data puncta una est *brevissima via*, quâ brevior dari nequit, ita inter duo data puncta simpliciter, & indivisibiliter una duci potest *recta linea*, quâ rectior dari nequit; & pariter inter duas datas lineas, vel lineam circumscribentem simpliciter, & indivisibiliter una est *plana superficies*, quæ extendi queat, quâ planior dari non potest.

Et similiter nulla est linea aut superficies *perpendicularior* alterâ *perpendiculari*, nec *parallelior* alterâ *parallelâ*. Sed sicut una est linea recta, quæ super dato puncto alterius rectæ cadens, æquales angulos hinc inde causet: sicut & una est inter duo puncta distantia; ita super dato puncto simpliciter, & indivisibiliter una est perpendicularis, quæ excitari potest, quâ perpendicularior dari nequit: & pariter per duo data puncta simpliciter, & indivisibiliter una erit parallelarum æquidistantia, quâ æquior dari non potest. Postremum ultro panditur. Nam quemadmodum distantias inter duo puncta metimur per lineas brevissimas, hoc est rectas, ita &

æqui-

æquidistantias metimur per rectas æquales, & perpendiculares (*supra n. 18.*); cùm ergo inter æquales non detur æqualior alterâ, nec inter perpendiculares perpendicularior; ita nec inter parallelas erit parallelior altera.

30. *Lationes* verò magnitudinis hìc vocamus passiones illas, quæ amplitudinem sui statùs satis *divisibilem secundùm magis, & minùs* suscipiunt. Censetur enim magnitudo, dum non est sub aliquâ Dignitate, latè ferri per totam amplitudinem majoris aut minoris ab indivisibili perfectione seu Dignitate recessùs, quem passio admiserit. Sicque *Curvitas* (exceptâ Sphæricâ, ac Circulari) & *Obliquitas* dici possunt *Lationes*, in quantùm quòd taliter afficiunt *magnitudinem*, ut hæc manens sub utralibet possit magis, aut minùs à Dignitate, idest à *Rectitudine*, sive à *Perpendicularitate* vagè recedere, & dilatari, ac proinde vel sub majore, vel sub minore Curvitate, aut Obliquitate inveniri, fieriq; propterea magnitudo Curvior curvâ, & Obliquior obliquâ, pro ut à Dignitate recesserit.

31. *Rectitudo* igitur aut *Planities*, sicut & *Perpendicularitas*, & *Paralleleitas* dicuntur *Dignitates* magnitudinis, quia ipsam sub aliquo *indivisibili statu* seu perfectione constituunt: ità ut nec rectior rectâ dari potest magnitudo, nec planior planâ, nec perpendicularior perpendiculari, nec parallelior parallelâ. Sed omnes rectæ, omnes planæ, omnes perpendiculares, & omnes parallelæ sub indivisibili prorsus ratione, in suo quæque genere, continentur, pro ut satis est dictum *suprà n. 27.*

32. *Curvitas* (excipe Sphæricam, & Circularem) & *Obliquitas* dici possunt *Lationes* magnitudinis: Magnitudo enim, quamdiù sub his manet passionibus affecta, valet semper magis aut minùs Curva vel magis, aut minùs Obliqua latè dici, juxta majorem, aut minorem à rectitudine, sive planitie, vel perpendicularitate, vel paralleleitate recessum, quæ Dignitates censentur, ut dictum est: & quasi ad eas promoveri, ordinariq; videtur; unde & Curviorem curvâ dari, & obliquâ obliquiorem, vel è contra, ambigit nemo; donec ad illum deveniatur statum, qui perfectionem indivisibilem im-

por-

portat. Hunc igitur *Dignitatem* vocamus, sub quo scilicet magnitudo *indivisibiliter talis* consistit; alium verò quemcumque, *Lationem* appellamus, sub quo scilicet magnitudo latè *magis aut minùs talis* afficitur.

Hac pro digressione satis.

33 Denique, ut omnia quæ ad Angulum spectant, summatim non minùs, ac ordinatim unicâ complectamur serie, primò ponimus angulum tripliciter omnino considerandum: nimirùm, *materialiter*, *formaliter*, & *respectivè*.

34 Angulus *materialiter* sumptus importat *naturam magnitudinis*, tum angulum *causantis*, tum *in amplitudinem surgentis*; ut in definitione anguli satis dictum est. Quatenus autem importatur natura magnitudinis angulum causantis; considerandum est, utrùm latera seu magnitudines ipsum causantes sint *lineæ*, aut *superficies*; hæcque, an sint *rectæ*, *planæ*, vel *curvæ*, vel *mixtæ*: ex quibus pendet omnis angulorum distinctio: quo pacto angulus vel est *rectilaterus*, vel *curvilaterus*, vel *mixtilaterus*. Quatenus verò importatur in angulo natura magnitudinis, quæ in puncto ex alterâ parte colligitur, ex alterâ verò in amplitudinem surgit; videndum est, utrùm illa sit *superficies*, aut *Corpus*: quo pacto angulus vel est *planus*, vel est *solidus*; de quo satis dictum.

35 Angulus *formaliter* sumptus importat solummodò ejus *quantitatem valoris*; quo pacto solùm est expendendum, utrùm angulus sit *Rectus*, aut *Obtusus*, aut *Acutus*; de quo *suprà n.* 11, 16. 17. & plura adhuc infrà.

36 Angulus *Respectivè* sumptus importat *naturam* mutuæ *relationis*, seu *respectûs*, quem anguli ad se invicem dicunt. Sicque anguli dicuntur, *Utrinque*, *Interni* vel *Externi*, *Ad-verticem*, *Alterni*, *Sub-alterni*, *Laterales* seu *Ad-basim*, & *Æquales*, vel *Inæquales*.

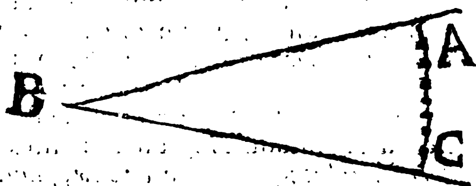
37 Angulus *materialiter* sumptus secundùm posteriorem considerationem dividitur in *planum*, & *solidum*. Et quia ea quæ de plano angulo hìc dicemus, facilè, & solido quoque attribui possunt, ut satis insinuavimus in *Monit. I*; relinquitur ergo, quòd tantùm *plani* anguli varias species, secundùm priorem consi-

de-

derationem, hic seriò expendamus.

38 Angulus igitur *planus* materialiter sumptus dividitur in *Rectilineum*, *Curvilineum*, & *Mixtilineum*.

Def. 9. 1. 39 Angulum *rectilineum* sic, post *planum*, solum definit Euclides: *Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur*. Hoc est, quem faciunt duæ *rectæ* lineæ sibi mutuò inclinatæ. Ut angulus ABC; quem faciunt rectæ AB, CB.



40 Angulus *Curvilineus* est, quem causant duæ lineæ *curvæ* sibi mutuò inclinatæ.

41 Angulus *Mixtilineus* est, quem causant duæ lineæ, *Recta* una, altera *Curva*, sibi mutuò inclinatæ.

42 *Curvilineus* verò angulus est quadruplex: nimirum vel *Concavus*, vel *Convexus*, vel *Medius*, vel *Sphæralis*.

43 *Concavus* est, quem faciunt duæ lineæ *curvæ* ex parte *interiore* mutuò se tangentes, & inclinatæ. Ut angulus DFE.

44 *Convexus* est, quem faciunt duæ lineæ *curvæ* ex parte *exteriore* mutuò se tangentes. Ut angulus FEG.

Me-

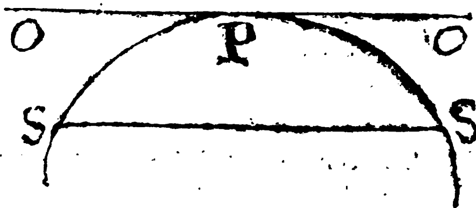
45 *Medius* esset, quem faciunt duæ lineæ *curvæ* una ex parte *interiore*, altera ex parte *exteriore*, mutuò se tangentes, & inclinatæ. Ut angulus E G I.

46 *Sphæralis* est, quem faciunt duæ lineæ *circulares*, idest duæ Circuli periphæriæ, mutuò in sphæræ superficie se se intersecantes; ad quem significandum in Planisphæriis, putà in *Astrolabio* &c. assumunt Mathesiphili supradictum angulum *medium*, ex lineis circularibus causatum.

47 Angulus *mixtilineus* dividitur in angulum *contingentiæ*, & angulum *segmenti*.

48 Angulus *contingentiæ* est, quem facit linea recta *foris tangens*, sive lambens ex parte *exteriore* lineam *circularem*: Ut angulus O P S. Tunc autem linea recta O O absolutè *Tangens* vocatur.

Scholion. Angulus autem *contingentiæ*, sicut & *convexus*, nullius sunt certi valoris; ideoque incomparabiles sunt cum quocumque angulo rectilineo.



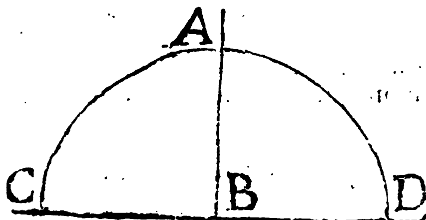
49 *Angulus segmenti est, qui sub recta lineâ, & circuli circumferentiâ comprehenditur*: Hoc est, quem facit linea recta incidens ex parte interiore in lineam *Circularem*. Ut angulus S S P. Tunc autem linea recta S S, si diameter non est, absolutè *chorda* seu *subtensa* vocatur: ut infra suo loco. Def. 6. 3.

De Angulis *in segmento*, & *insistentiæ* infra dicemus, cùm de Circulo: mixtilinei enim non sunt.

50 Angulus *formaliter* sumptus, vel est *Rectus*, vel *Obtusus*, vel *Acutus*.

51 Angulus *rectus* est, quem faciunt, velut in pla-

no, duæ lineæ sibi invicem *perpendiculariter* insistentes, *suprà n.* 11. *& Euclid. def.* 10. 1. cujus *valor* sive mensura semper est *quadrans Circuli*: desumitur enim ejus valor ex quantitate arcùs, ex apice anguli, tamquam è centro, inter utrumque latus, descripti, qui debet adamussim esse quarta pars circuli, cujus est arcus; de quo tamen infra, postquàm de circulo egerimus, commodior ac diffusior sermo redibit. Velut anguli A B C, A B D sunt *recti*, quia causantur à duabus rectis lineis A B, C D sibi invicem perpendiculariter insistentibus, quarum mutua inclinatio, seu, quod idem est, angulorum valor, mensuratur per æquales illos ar-



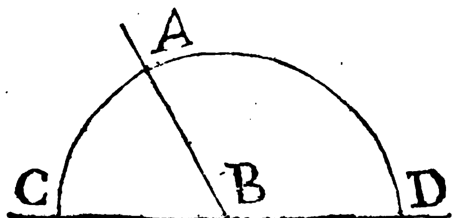
cus A C, A D ex centro B descriptos, qui exactè sunt duo Circuli quadrantes: est enim C A D B semicirculus bifariam à perpendiculari A B æqualiter divisus.

52 Angulus *rectus*, *Dignitas* est: indivisibiliter enim consistit *suprà n.*29. Nam cùm ad omnimodam linearum, angulos rectos conficientium, divariationem, funditùs destruatur angulorum æqualitas, in qua formaliter consistit totum esse perpendiculare linearum, ita quoque ruet totum esse Rectum angulorum.

53 Anguli verò *Obtusus*, & *Acutus*, qui & *Obliqui* dicuntur, sunt, quos Inæquales ex utroque latere causant duæ lineæ invicem *obliquæ*. *Obtusus* dicitur qui *major* est Recto, *ut suprà n.* 16. *& Euclid. def.* 11. 1. *Acutus* verò qui *minor* est Recto, *ut suprà n.* 17. *& Euclid. def.* 12. 1. Ut anguli A B C, A B D dicuntur

obli-

obliqui, eorumque major A B D dicitur *Obtusus*; minor verò A B C dicitur *Acutus*.



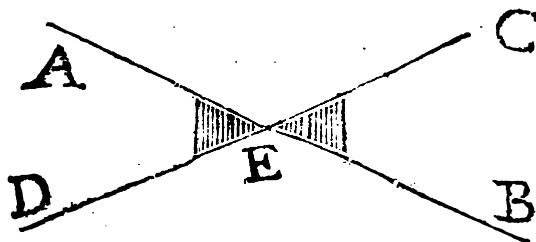
54 Censetur autem alio *major*, aut *minor angulus*: non quò longiores, aut breviores sint lineæ ipsum causantes &c. benè verò quò major, aut minor fuerit arcus, sub eâdem circini divaricatione, angulum utrumque mensurans, ut supra diximus, & fusiùs infra. Unde *Obtusum*, & *Acutum* dici possunt *Lationes* anguli ex dictis *suprà n.* 30.

55 Angulus *Respectivè* sumptus dividitur in angulos *Utrinque*, *Internos* & *Externos*, *Ad-verticem*, *Alternos*, *Sub-alternos*, *Laterales* seu *Ad-basim*, & *Æquales*, aut *Inæquales*.

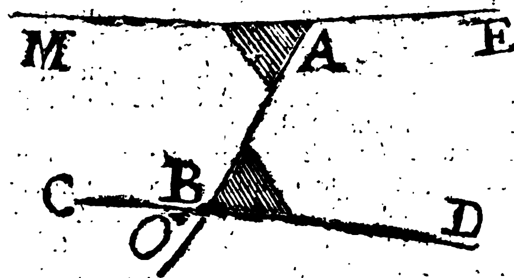
56 Anguli *Utrinque* seu *deinceps*, dicuntur duo illi, quos *hinc-inde* causat linea quomodolibet alteri insistens. Habent autem semper latus idem commune, eumdemque verticem, atque ambo ad *disparatas* partes in amplitudinem surgunt. Lubet hìc partes *disparatas* appellare, quas disernit linea lineæ insistens. Ut anguli ABC, ABD *in sup. exẽplo*, qui à lineâ AB cuicumq; CD quomodolibet insistente causantur: habent idem centrum B, idemque latus A B, surguntque in amplitudinem ad partes disparatas A C, A D, quas dividit seu discernit insistens A B.

57 Anguli *Ad-verticem* dicuntur duo illi oppositi, ex quatuor, quos ad idem punctum commune causant duæ lineæ sese mutuò *intersecantes*: taliter dicti quia nonnisi ad communem *verticem* sese tangunt. Ut si lineæ A B, C D sese mutuò intersecuerint in puncto E,

perſpicuum eſt, binos angulos albos A E C, D E B, ſicut pariter binos angulos nigros C E B, A E D nihil habere commune præter *verticem* E; ideoque angulos *Ad-verticem* appellari.



58 Anguli *Alterni* dicuntur duo illi, ex quatuor, quos ab utroque extremorum contactu cauſat linea quomodolibet inter duas alias incidens; qui latus idem habent commune, verticeſque diverſos, atque ad partes inter eaſdem lineas in amplitudinem ſurgunt *contrarias*: quæ ut in plurimùm *Cyfræ* Z referunt ſimilitudinem. Sic enim linea A B inter lineas M E, C D quomodolibet incidens, ex utroque extremorum contactu A & B, quatuor inter eaſdem lineas cauſat angulos, binos & binos Utrinque, nimirum B A M, B A E: & A B C, A B D; ex quibus tamen duo albi contrariè poſiti C B A, B A E: & pariter duo nigri contrariè poſiti D B A, B A M: dicuntur ad invicem *Alterni*. Eidem enim bini adjacent lateri B A; proprium tamen quiſque ſibi vendicat apicem ſeù verti-

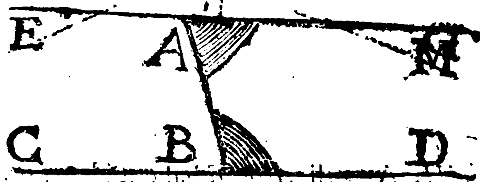


cem,

cem, putà quòd si uni Alternorum sit vertex B, alteri erit A; atque intra easdem lineas ME, DC surgunt in amplitudinem ad partes *contrarias* AD; MB vel EB, AC: adeout lateribus similitudinem *cyfra* Z, videlicet, MABD, repræsentare videantur.

59 Anguli autem *Subalterni* dicuntur illi, quorum unus est Ad-verticem cum alterius Alterno, vel Alternus cum alterius Ad-verticem. Ut in pari exemplo angulus CBO dicitur *Subalternus* cum angulo MAB: est enim Ad-verticem cum angulo ABD, qui est Alternus cum ipso MAB.

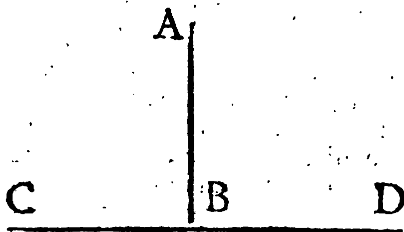
60 Anguli *laterales*, qui & Anguli *Ad-Basim*, dicuntur duo illi ex quatuor, quos ab utroque extremorum contactu causat linea inter duas alias incidens; qui, eidem adjacentes lateri, proprium singuli, ac diversum obtinent verticem, sed inter easdem lineas decussatim ad easdem partes in amplitudinem surgunt. *Ad-Basim* dicti, quia cùm uterque intra figuram extiterit, Basi illius adjacet, atque ad easdem partes decussatim tendentes, eodem fulciuntur crure, quod facilè tanquam *Basis* assumitur in figurâ. Ut in simili exemplo anguli EAB, CBA simul albi, & consequenter anguli MAB, DBA simul nigri, dicuntur invicem *Laterales*, seu *Ad-Basim*. Eidem enim adjacent lateri AB, diversosque vertices habent, A scilicet & B; atque ad easdem partes, nempe vel simul ad EC, vel simul ad MD, decussatim, ut patet, in amplitudinem surgunt.



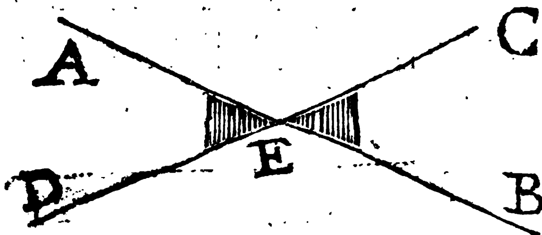
Corell. I. Anguli igitur *Utrinque* habent idem *latus commune*, & idem *centrum*, sed in amplitudinem surgunt ad partes *disparatas*, *suprà n.56.* Bini scribuntur *quatuor* cyfris specie diversis, quarum (ut anguli rectò

ordi-

ordinatèq; nominentur, & commodiùs à cæteris distinguantur) *prima*, & *media* debent esse *eadem* in utroque: adeo ut vocentur ver: gra: A B C, A B D, & non A B C, D B A, nec C B A, D B A; quibus licet idem significatur, tamen confusè, & minùs ordinatè.

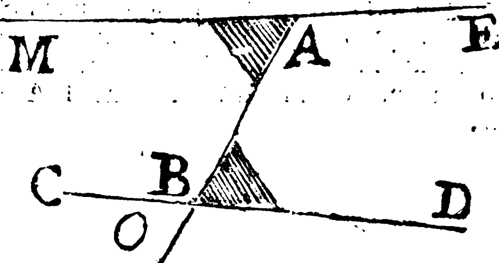


Coroll. II. Anguli *Ad-verticem* non habent nisi *verticem communem*, & propterea bini scribuntur quinque cyfris, quarum sola *media* debet semper *eadem* esse in utroque, *cætera* verùm utcumque *diversæ*. Ut ver: gra: vocentur A E C, D E B.



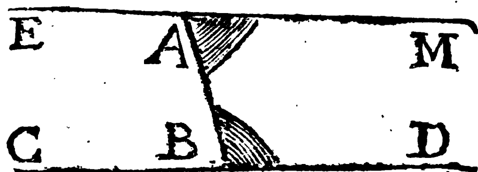
Coroll. III. Anguli *Alterni* habent idem *latus commune*, sed *vertices diversos*, surguntque in amplitudinem ad partes *contrarias*; bini scribuntur quatuor cyfris, ex quibus *media* & ultima *unius* debent semper poni pro *primâ*, & secundâ *alterius*. Ut ver: gra: vocentur D B A, B A M, & non aliter.

Co-



Coroll. IV. Anguli *Subalterni* nil habent commune, præterquam quòd uno *protenso partialiter* fulciuntur *latere.* Bini scribuntur quinque cyfris, ex quibus *ultima unius* ponitur pro *mediâ alterius*, vel è converso: ut ver: gra: vocentur M A B, C B O: vel O B C, B A M.

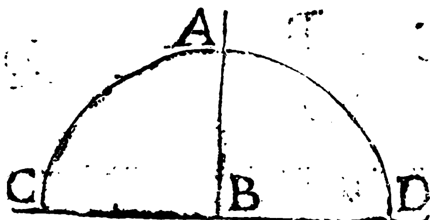
Coroll. V. Anguli *Laterales* seu *Ad-basim* habent idem *latus commune, vertices diversos*, sed *decussatim* in amplitudinem surgunt ad *easdem partes*. Bini notantur quatuor cyfris, ex quibus *media unius* semper fit *ultima* alterius, ut ver:gra: vocētur M A B, D B A.



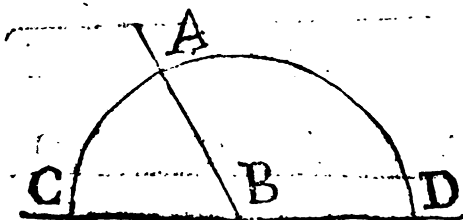
61 Anguli denique *Æquales*, & *Inæquales* dicuntur in quibus *par* aut *impar* fuerit mutua laterum *inclinatio*, quæ est ipsorum *valor* (ut supra n. 12. § 1.) Nimirùm illi anguli dicentur *æquales*, non qui latera ad invicem habebunt æqualia &c. sed in quibus *par* erit mutua laterum *inclinatio*; hoc est in quibus idem fuerit utriusque *valor*. Ut in apposito exemplo *æquales* dicuntur anguli A B C, A B D; non quia pares ver: gra: sint lineæ A B, C B, vel A B, B D eos causantes;

sed

ſed quia par ſit in eis mutua laterum A B cum C B, & A B cum B D inclinatio; ſeu, quod idem eſt, quia æquè valent. Qui quidem æqualis *valor* innoteſcit ex æqualitate *arcuum* A C, A D ex communi centro B, ſub eâdem circini divaricatione B A deſcriptorum.

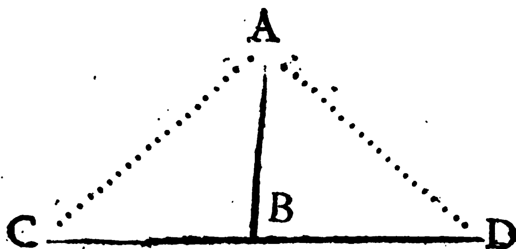


62 *Inæquales* verò anguli dicuntur, non quia unus longiora, aut breviora habeat crura, quàm alter, majoremve, aut minorem in amplitudinem ſurgat &c. benè verò *Inæquales* ſunt ver: gra: anguli A B C, A B D; quia *impar* in eis eſt mutua laterum A B cum C B, & B D cum A B, *inclinatio*; impares enim ſunt *arcus* A C, A D ex communi centro B, ſub eâdem circini divaricatione B C, deſcripti.



63 Inſuper Anguli ſive utrimque, ſive Alterni, ſive Subalterni, ſive Laterales ſeu Adbaſim, ſive Æquales, aut Inæquales, nonnunquam habent dici *Interni*, aut *Externi* pro libito determinantis figuram, à quâ vel includuntur vel excluduntur. Hoc eſt *internus* ver: gra: dicitur eorum ille, qui aut ſit aut intelligatur eſſe intra figuram concluſus. *externus* verò reliquus ille, qui

qui extra ipsam seclusus remanet figuram. Ut in eodem exemplo angulorum Utrinque, A B C, A B D, si fiat Triangulum ad partes A C, angulus C B A dicetur *Internus*, & reliquus Utrinque A B D, *externus*. Si è contra verò Triangulum fieret ad partes A D, tunc angulus A B C diceretur externus; Angulus verò A B D. Internus.

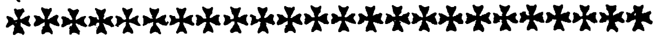


ANGULORUM DISTINCTIO
per arborem explanata.

- Angulus
  - Planus.
  - Solidus.
    - Materialiter
      - Rectilaterus *ſeu* *Rectilineus*.
      - Mixtilaterus *ſeu* *Mixtilineus*.
        - Contingẽtiæ
        - Segmenti.
      - Curvilaterus *ſeu* *Curvilineus*.
        - Convexus.
        - Concavus.
        - Medius.
        - Sphœralis.
    - Formaliter
      - Rectus.
      - Obtuſus.
      - Acutus.
    - Reſpectivè
      - Utrinque.
      - Ad-verticem.
      - Alternus.
      - Subalternus.
      - Ad-baſim.
      - Æqualis, vel Inæqualis.
      - Internus.
      - Externus.

Porrò ſi angulus ex eâ parte, quâ in amplitudinem ſurgit, aliquâ magnitudine ſubtendente, penitus claudatur, ſtatim Figura conſurget: unde erit

CA-



CAPUT QUINTUM

De Figuris.

§. I.

De Figurâ in genere.

1 TErminus est, quod alicujus extremum est, ut suprà diximus *cap*. 3. *n*. 2. quo pacto puncta sunt termini lineæ; lineæ sunt termini superficiei; & superficies sunt termini corporis. *Def.* 13. 1.

2 *Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur*. Hoc est, eam magnitudinis terminationem hìc vocamus *Figuram*, secundùm quam, ex diversâ partium extensione, ac dispositione, *magnitudo* possit multiformiter *comprehendi*, sive *unico* scilicet *ambiente termino* sive *pluribus*. Unde *Figuram* convertibiliter hìc accipimus cum ipsâ *magnitudine* terminata, atque *comprehensa*. *Def.* 14. 1.

3 Ex quo tamen addisces, quòd, licèt omnis magnitudo sub aliquibus terminis comprehensa sit Figura, ut dictum est, lineam verò quamvis finitam propriè dici Figuram, negamus; non quia interminatam fortasse eam judicemus, sed quia à suis extremis, nempè punctis, ipsa verè, & propriè non comprehenditur eo modo, quo cœteræ magnitudines videntur à suis terminis adæquatè comprehendi: Superficies scilicet à lineis, & Solida à superficiebus. Hæc etenim verè, & propriè comprehenduntur: cùm in suâ terminatione circumquaque concludi, & velut à limite in gyrum circumducto adæquatè contineri, ac undique circumvallari videantur; ad quod saltem latitudo requiritur, quæ longitudine potest undique circumterminari. Cum ergo linea ex propriâ definitione sit omnino latitudinis expers & profunditatis, eam verè & propriè à suis terminis *comprehendi*, concedere non debemus, nec proin-

de *Figuram* appellari; sed solùm à duobus extremis punctis eam, asserimus, *terminari*, quæ non sunt habiles termini ad magnitudinem ritè ambiendam seu comprehendendam, ut requiritur ad Figuræ definitionem: cùm puncta propriè lineam *ambire* non dicantur, sed tantùm ejus terminant longitudinem.

Relinquitur ergo, quòd illa magnitudo verè, & propriè *Figura* dicitur, quæ *crassitudinem* aut saltem *latitudinem* includit: videlicet, quæ *Solidum* esse debet, aut saltem *Superficies* terminata. Unde claritatis gratiâ sic possumus hìc eam definire: Est magnitudo sub unicâ vel pluribus comprehensa magnitudinibus terminatibus: hoc est magnitudinibus, quæ licèt indivisibiles sint in ordine ad id, quod terminant, ut lineæ in ordine ad Superficiem, aut superficies in ordine ad Solidum, habent in se tamen aliquam extensionem, qua valent magnitudinem (de qua dicitur Figura) undequaque circumcingere, atque comprehendere, modo suprà exposito. Unde

4 Figuræ primaria consideratio, duplex est: nimirum, Vel secundùm *magnitudinem comprehendentem*, Vel secundùm *magnitudinem comprehensam*.

5 Figura secundùm *magnitudinem comprehendentem*, aut est *linea*, aut *Superficies*. Puncta enim nequeunt habiliter aliquod comprehendere, ut dictum est quia nullam habent extensionem. Corpus autem nequit comprehendere quia totam habet extensionem: nequit enim esse terminus alterius magnitudinis, nec propterea indivisibile in ordine ad aliud, sicut linea in ordine ad superficiem, aut superficies in ordine ad ipsum.

6 Figura secundùm *magnitudinem comprehensam* nonnisi *solidum*, aut *superficies* erit. nequit enim *linea* dici Figura, quia non verè, & propriè comprehenditur à suis terminis, nempe punctis, ex dictis *suprà n.* 3.

7 Figura ratione *magnitudinis comprehensæ*: vel est *plana*, vel *solida*.

8 Figura ratione *magnitudinis comprehendentis*, efficitur vel *rotunda*, vel *angularis*, vel *mixta* ex utroque.

9 Figura *plana* est *superficies*, quæ à *linea*, vel *lineis* undique *comprehenditur*, & concluditur.

Fi-

10 Figura *Solida* est *Corpus*, quod sub unicâ vel pluribus *superficiebus* undique comprehenditur.

11 Figura *Rotunda* est, quæ sub *unicâ* curvâ, sive lineâ, sive superficie, ad seipsam inclinatâ circumquaque comprehenditur. Vel quæ caret angulis.

12 Figura *Angularis* seu laterata est, quæ sub *pluribus* sive lineis, sive superficiebus comprehenditur. Taliter dicta, quia angulos habet.

13 Quælibet igitur figura sub quatuor combinationibus reperiri solet: nempe, quæ sit, vel *plana-rotunda*; vel *plana-angularis*; vel *solida-rotunda*; vel *solida-angularis*.

14 Figura *plana-rotunda* est superficies sub *unicâ* tantum curvâ *lineâ* comprehensa, atque ab eâ circumquaque conclusa. Ut *Circulus*, *Ellipsis* &c.

15 Figura *plana-angularis* est superficies *pluribus* sub *lineis* comprehensa. Ut *Triangulum*, *Quadrangulum* &c.

16 Figura *solida-rotunda* est Corpus sub *unicâ* tãtum curvâ *superficie* ad seipsam inclinatâ undequaque comprehensum. Ut *Sphæra*, *Ovale* &c.

17 Figura *solida-angularis*, est Corpus sub *pluribus* undique comprehensum *Superficiebus*: Ut *Pyramis*, *Prisma*, *Parallelepipedum* &c.

18 Porrò circa figuram in genere nonnulla sunt consideranda, quibus ipsa vel causatur, vel formatur, vel resultat, vel denominatur, vel comparatur, vel dividitur, vel mensuratur, vel resolvitur, vel movetur; videlicet: *Latera*, *Anguli*, *Area*, *Circumferentia* seu *Ambitus*, *Centrum*, *Diameter*, *Semidiameter*, *Diagonus*, *Semidiagonus*, *Chorda*, *Basis*, *Vertex* seu *Apex*, *Kathetum*, *Axis*, & *Poli*: quæ singillatim expendere hujus est loci.

19 *Latera* Figuræ dicuntur ipsæ *magnitudines* eam *comprehendentes*, ac terminantes, sive *lineæ* sint, sive *superficies* *suprà n.* 4. Hinc quando latera sunt *lineæ* Figuram constituunt *planam*; quando verò sunt *superficies*, Figuram constituunt *solidam*. Præterea quando latera sunt *plura*, *angulos* causant in Figurâ, proindeque eam constituunt *angularem*, & *lateratam*; quando verò non sunt plura, sed *unica* tantùm est magnitudo

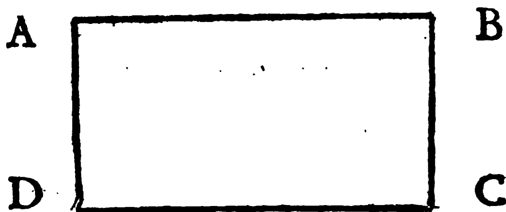
Fi-

Figuram circumterminans, nullus ibi causatur angulus, proindeque Figura evadit *rotunda*, ut dictum est *suprà n*. 8. 9. 10. 11.

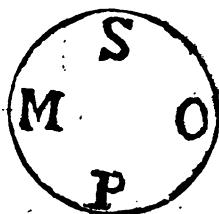
20 *Pluralitas laterum* in Figurâ passim convinci solet ex *pluralitate angulorum*: plures enim esse terminos seu latera cujuscumque figuræ toties dicimus, quoties in eâ plures advertimus angulos: undè in figurâ planâ tot adesse latera, quot angulos ibi causari, non negatur: utpotè quia multitudo angulorum in figurâ (saltem regulari) est argumentum pluralitatis laterum, & è converso. Nam etsi latera invicem conjuncta, in angulari figurâ, quamdam continuam, non secus ac in rotundâ, videantur referre magnitudinem, unicam scilicet lineam, aut superficiem ambientem seu circumterminantem; satis tamen frangi, bifariamque dividi rectè judicatur magnitudo illa circumterminans, ubi angulus causatur. Nam ut colligitur ex anguli descriptione superiùs traditâ *Cap*. 4. §. 1. Angulus importat mutuam magnitudinum inclinationem, & in puncto contactum &c. Unde jam illam, plura potiùs contigua, ad pluritatem angulorum, quàm unum quid continuum, ad unitatem ambientis, sanè reputare convenit. Ideoque in figuris angularibus, non unum, sed plures esse terminos, seu latera, satis convincitur ex pluritate angulorum.

Ut ver: gra: in figurâ primâ tetragonâ A B C D, latera seu termini A B, B C, C D, D A, licet se habeant per modum unius lineæ ambientis, & circumsepientis figuram, in quantùm scilicet nonnisi unum quid continuum, unicam circumscribens magnitudinem seu figuram quadrangularem, inter se referre videantur; nihilo tamen minùs plures dicuntur esse lineæ, & non unica, solùm ex hoc quod plures in Figurâ causent angulos; Immo (cum plana sit) quatuor in eâ dicuntur esse latera, quia quatuor ibi causantur anguli: unde & quadrilatera Figura adpellatur, quia quadrangularis est. Videtur enim quodammodo frangi, subindeque bifariam dividi linea illa ambiens, ac circumsepiens A B C D, quoties anguli in punctis A, B, C, D, causantur. Quod sufficit ad satis intelligendam hanc laterum in Figurà pluritatem.

Non



Non autem sic est dicendum in Figurâ secundâ de ambiente lineâ curvâ S M P O, quæ terminus est figuræ rotundæ S M P O (quæcumque sit illa). Nam hæc modò dicitur unica tantum linea, & non plures, quia ad se ipsam in gyrum inclinata, nullum in figurâ causat angulum.



21 Sive latera, sive anguli in quâcumque figurâ, possunt tum *æquales* esse, tum *inæquales*.

22 Sive latera, sive anguli *æquales* dicuntur, quorum eadem est mensura, sive *quantitatis*, sive *valoris*. Sicut & *inæquales*, quorum diversa est mensura: unde

23 *Æquiangula* figura dicitur cujus omnes anguli sunt inter se æquales: scilicet ejusdem *valoris*.

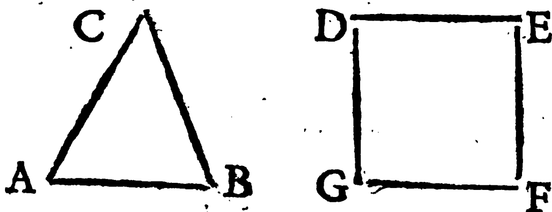
24 *Æqui-latera* figura dicitur cujus omnia latera sunt inter se æqualia: scilicet ejusdem *quantitatis*.

25 Latera ad invicem *opposita*, sive anguli ad invicem *oppositi* in figurâ, censentur ea, inter quæ, per ambitum figuræ, *æqualis* hinc-inde *angulorum laterumque numerus* interjicitur.

26 Et similiter latera angulis *opposita*, vel è converso, anguli lateribus *oppositi*, in figurâ esse dicuntur, quan-

quando ita ab invicem distant, quòd inter ea, per ambitum figuræ, *æqualis* hinc-inde laterum angulorumve *numerus* interjicitur.

Ut in figurâ A B C latus A B dicitur oppositum angulo C & angulus C oppositus lateri A B, quia inter ea per ambitum figuræ duo latera, A C, B C, unum hinc aliud inde, æqualiter numerantur. Et in aliâ figura D E F G, latera E F, D G dicuntur opposita, quia inter ea per ambitum figuræ duo quoque latera, E D, F G, unum hinc aliud inde, numerantur. Et similiter anguli G, & E dicuntur oppositi, quia inter eos per ambitum figuræ duo hinc duoque inde latera æqualiter numerantur, sicut & duo anguli, D & F, unus hinc alter inde.



Coroll. Sequitur angulos angulis, aut latera lateribus opposita solùm dari in figurâ parem habente laterum angulorumque numerum. Sicut & angulos lateribus, sive latera angulis opposita, solùm dari in figurâ imparem habente laterum angulorumque numerum.

27 *Ambitus*, & *Circumferentia* dupliciter habent considerari: uno modo *latissimè*, & impropriè; alio verò modo propriè, & *specialiter*.

28 Ambitus, & Circumferentia *latissimè*, & impropriè accepta, videntur stare pro absoluto termino circumscribente totam figuræ capacitatem: unde sæpè invicem confunduntur, ita ut alterum pro altero accipere, à synonimiâ aliquibus non procul abesse videatur. Sicque ambitus, & circumferentia generaliter accipiuntur pro terminis aut termino, quamlibet sive solidam, sive planam, sive angularem, sive rotundam, circumscribente figuram.

Am-

29 Ambitus verò, & Circumferentia propriè, & *specialiter* sumpta, non invicem confunduntur, nec unum pro alio licet accipere;sed eorum quodlibet proprium habere videtur significatum. Unde sic *Ambitus*, dicitur propriè de terminatione figuram angularem, sive planam, sive solidam, concludente. *Circumferentia* verò solùm dicitur de termino rotundam figuram, sive planam, sive solidam, comprehendente. Terminus enim figuræ rotundæ, cùm sit unica tantùm magnitudo ad seipsam undequaque inclinata, verè & propriè circumferri, atque figuram undique curvatim circumire, satis videtur. Quod autem non verificatur in lateratâ seu angulari figurâ, ubi plura sunt latera, quæ propriè non indigent curvatim circùmferri, ut figuram concludant, cùm id satis per angulos compleant. Unde in proposito nostro circumferentia nonnisi unicæ magnitudinis, rotundam circumcingentis figuram, extensionem importat.

Coroll. Sequitur; figuram *rotundam*, sive planam, sive solidam, sub unicâ terminari magnitudine, cujus extensio *circumferentia* propriè vocatur; Figuram verò *angularem*, sive planam, sive solidam, sub pluribus contineri lateribus, quorum extensiones simul collectæ *ambitus* propriè appellantur.

30 *Area* figuræ dicitur ejus *capacitas*, seu totum illud materiale spatium inter ejus extrema comprehensum; quæ tamen distinguitur ab ipsâ figurâ, in quantum quòd area præscindit, an dicatur de planâ vel solidâ, an de rotundâ vel angulari figurâ;& in suo conceptu solùm includit extensionem illam, sive totum spatium, quod occupat magnitudo sub unico vel pluribus terminis quomodolibet comprehensa.

31 *Centrum* in figurâ *punctum* est intra ipsam positum, circa quod partes consistentes aliquem inter se æqualitatis ordinem dicunt, sive *secundùm magnitudinem*, sive *secundùm gravitatem*. Unde

32 *Centrum* duplex est, nempè, centrum *gravitatis*, & centrum *magnitudinis*. Potest enim idem corpus centrum habere suæ magnitudinis, vel diversum à centro suæ gravitatis, vel idem cum eo.

33 Centrum *gravitatis*, quod proprium est cor-

 poris

poris physici, est punctum intra corpus positum, circa quod fusæ partes æqualis inter se ponderis seu gravitatis existunt. Vel ut definit Pappus Alexandrinus lib. 8. Math. Dicitur illud *punctum intra corpus positum, à quo si grave appensum mente concipiatur, dum fertur, quiescit, & servat eam, quam ab initio habebat positionem, neque in ipsâ latione circumfertur*. Vel ut ait Fredericus Commandinus initio lib. de centro gravitatis: *Punctum intra corpus positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt*. Nam si per tale punctum ducatur Planum quodcumque, ipsum dividet in partes *æqualium momentorum*, hoc est, pro tali corporis dispositione, in æquilibrio consistentes.

Est autem hoc in loco *momentum*, vis illa seu propensio, quam habent corpora ad motum deorsum, quæ quidem oritur tum à gravitate corporis, tum à dispositione ad motum; quâque à DEO naturæ Authore cunctis corporibus inditâ, mirè factum est, quòd, dum gravitando quodlibet juxta propriæ gravitatis genus, debitum sibi respectivè locum rectà petere conatur, ita invicem absque penetratione, & confusione premuntur, quòd nullus in mundo remanet corporis expers locus, subindeque procul è naturæ finibus horrendum rejicitur vacuum, hæcque, quam miramur, corporalium omnium ordinata compactio, ac elegans Universi consurgit harmonia.

34 *Linea directionis* est recta linea, ducta à puncto, cui innititur, aut ex quo appenditur, corpus grave, ad centrum gravium seu terminum communem, ad quem rectà tendunt omnia gravia.

35 Centrum verò *gravium*, saltem quò ad sensum, est ipsum magnitudinis Centrum Terraquei, seu centrum Universi, quod dicimus esse terminum communẽ, ad quem tendunt omnia gravia per *lineam directionis*.

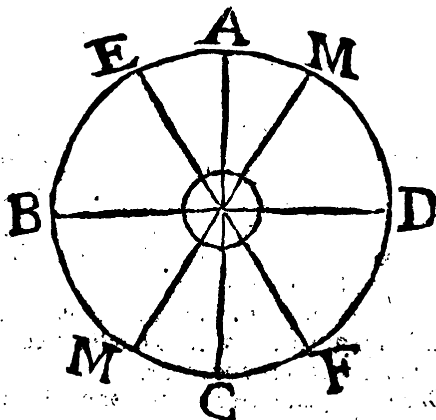
36 Centrum *magnitudinis* (quod *Centrum* absolutè, & sine addito enunciatur) est illud *punctum* in figurâ positum, circa quod undique partes *æqualis extensionis* seu magnitudinis consistunt. Vel quod intra figuram situm ab oppositis circumferentiæ partibus æqualiter est remotum.

Oppo-

Opposita circumferentiæ partes in figurâ hìc dicuntur, quæ hinc-inde per ambitum figuræ æqualiter inter se distant.

Hujusmodi autem centrum non æqualiter,& eodem contrahitur modo in figuris universis, sed in aliquibus habetur *propriissimè*, & omnino *simpliciter*; in aliis verò *minùs propriè*, *& secundùm quid*. Solus *Circulus*, *& Sphæra* obtinent *propriissimè*, & omninò *simpliciter Centrum*; siquidem in utriusque medio simpliciter verificatur haberi *punctum*, circa quod *omnes* undique figuræ *partes* æqualis magnitudinis consistunt: circumferentiæ enim partes omnes æqualiter à centro distant, ut infrà dicetur. Cæteræ verò figuræ nonnisi *secundùm quid centrum* habere dicuntur, ut *Triangulum*, *Quadrangulum*, *Poligonus*, *Ellipsis*, *Ovale &c.* in quibus, non omnes undique partes circa medium fusæ, ad ambitum usque seu circumferentiam, sub æqualibus extensionibus consistunt, sed solùm *opposita*, quarum scilicet per ambitum figuræ hinc-inde æqualis est inter se distantia.

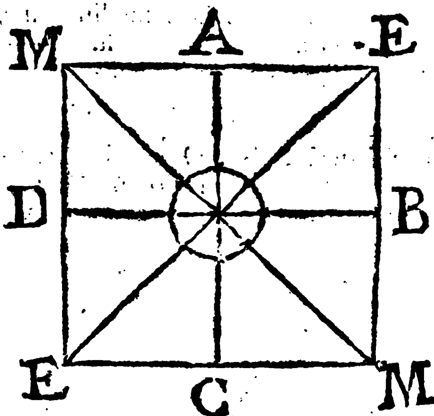
Si enim in figurâ A B C D omnia Circumferentiæ puncta æqualiter distent à medio puncto O, ita quòd verum sit, circa illud undique partes omnes æqualis



omnino magnitudinis consistere, adeòq; lineæ O A, O B, O C, O D, cæteræque omnes rectæ, quæ à pún-

cto O in circumferentiam projici intelligantur, sint æquales; dico punctum O esse *propriissimè*, ac omninò *simpliciter centrum* figuræ A B C D, ipsamque esse vel Circulum in planis, vel Sphœram in solidis: de quibus infrà.

Si verò in figurâ A D M E, non omnes undique partes circa medium fusæ, sed solùm *opposita*, ab eo ad ambitum usque sub æqualibus extensionibus inveniãtur consistere: ut rectæ lineæ O E, O E, aut O M, O M, aut O B, O D, vel cœteræ aliæ similiter oppositæ; dico figuram A D M E non habere propriè ac simpliciter centrum: & propterea punctum O dici centrum *minùs propriè*, *& secundùm quid* ejusdem figuræ, quæcumque sit illa.



Coroll. Sequitur quasdam esse figuras adeò *irregulares*, ut minimè sit in eis assignabile *centrum* nec *simpliciter*, nec *secundùm quid*: cùm nullas habeant partes æqualis magnitudinis circa medium consistentes, nisi priùs ad *regulares* revocentur.

37 *Diameter* (ait *Cluverius*) à præpositione græcâ *Dia*, idest, *per*, & verbo *metreo*, idest *metior*, dicta: hoc est, quasi medium dimetiens; *generaliter & impropriè* sumitur pro *magnitudine* rectâ, aut planâ, *figuram*

per

per medium dimentiente atque *in duo*, sive æqualiter, sive inæqualiter, dispescente. Sicque *Chorda* in Circulo, *Sector* in Sphœrâ, *Diameter* in utroque, & *Diagonus* in Tetragono, & Poligonis *generaliter Diametri* vocari possunt. Et nota ly *magnitudine rectâ, aut planâ*; siquidem hujusmodi Diameter in planis semper est linea recta, in solidis verò potest esse superficies plana; ut fusiùs infrà.

Proprio verùm ac *speciali* modo sumitur Diameter pro illâ dumtaxat magnitudine, quæ, centrum alicujus figuræ pertransiens, eam bifariam, idest in duo æqualia, dividit. Hæcque est vera, ac propria diametri acceptio, quam ipsius utraque nominis ethymologia principaliter significare videtur; cùm ly *Dia*, tum prout significat præpositionem *per*, tum pro ut significat *duo* (ut alii censent) principaliter & simpliciter divisorum importare videtur æqualitatem potiùs, quàm indeterminatam ipsorum præcisionem; sicuti & centri potius perfixionem, quàm aliùs medii figuræ puncti persectionem. Sicque non solùm rotundæ, verùm etiam & lateratæ seu angulares figuræ Diametrum procul dubio obtinebunt; cum tam rotundæ, quàm angulares, possint æqualiter à suis diametris dissecari. Nihilo tamen minùs placet nonnullis claritatis gratiâ Diametrum in hac ultimâ acceptione, aliter nominare in lateratis figuris, quàm in rotundis. Et meritò: in angularibus enim seu lateratis, quia passim in oppositos angulos Diametri duci solent, eas malunt *Diagonos*, quàm Diametros appellare; ut in distinctione termini, proprium rei fiat vocabulum, & in proprietate nominis notior evadat muneris significatio. In rotundis verò, ubi nulli sunt anguli, sed à quovis ad quodcumque punctum oppositum duci potest Diameter, eas absolutè *Diametros* vocant.

Coroll. Oppositionem diametralem in figurâ dicimus, esse inter illa puncta, quæ Diameter utrinque à Centro attingit.

38 *Diagonus* igitur seu *Diagonalis* est propria Diameter figuræ angularis. Est autem illa magnitudo, quæ figuræ medium dimetiens ipsam bifariam dividit in angulis oppositis *suprà n. 25.* Diagonus enim (sicut

& in

& in ethimologiâ *Diametri* dictum est) à præpositione *Dia*, idest *per*, & nomine *gonus*, idest *angulus*, quasi, *per angulos*, est dictus: in quantùm scilicet quòd per Diagonum fiat dimensio, & divisio in figurâ penès angulos. Unde quatenus, figuram per medium metitur, eamq; in duo sive æqualiter, sive inæqualiter dividit, induit rationem *generalissimam*, *& impropriam* Diametri, ut dictum est; quatenus autem Diagonus quandoque figuram dividit in duo æqualia, centrum illius pertransiens, eum *verè*, *& propriè Diametrum* procul dubio, ut in rotundis, nuncupare licebit; quatenus verò illa divisio potiùs in angulis, quàm alicubi, fiat, eum propriùs *Diagonum*, quàm Diametrum, appellare debemus.

Porro cùm Diagonus ex ipsius nominis intelligentiâ soli figuræ angulari competat, fit, quòd in eâ duci debet, non utcumque, scilicet à quovis ad quodcumque ambitùs punctum (etsi transeat per centrum, velut in rotundis habetur); bene verò inter duos ejus angulos oppositos *suprà n.* 25. perduci debet, atque in illis totiùs figuræ dissectionem adimplere.

Coroll. Illa figura Diagonum obtinet, quæ parem habet angulorum laterumque numerum: cùm hæc sola habeat angulos angulis oppositos, ut suprà.

39 *Semidiameter* est, recta quæcumque è centro ad circumferentiam projecta.

40 *Semidiagonus* dicitur, dimidium Diagoni.

41 *Chorda* dicitur solùm de Circulo. Unde vide ipsum, infrà.

42 *Sector*, *& Segmentum* dicuntur tum de Circulo, tum de Sphœrâ: unde suis vide in locis.

43 *Complementum* dicitur, tum de Circulo, tum de Parallelogrammo: ac proinde sua perge loca.

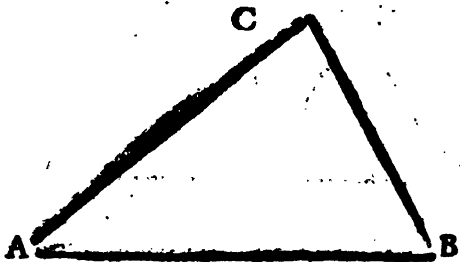
44 *Basis* est aliquod figuræ latus: unde solùm dicitur in figurâ *angulari* seu lateratâ: & dupliciter sumitur; nimirùm, *in ordine ad locum*, *& in ordine ad ipsam figuram*.

45 Basis figuræ *in ordine ad locum* semper dicitur illud latus, quod figuram terminat ex eâ parte, quâ *Plano Horizontali* (*suprà n.* 19. §. 2. *cap.* 4.) applicari figura intelligatur. Vel clariùs: dicitur illud figuræ latus,

tus,

tus, quod in placitâ ejus situatione *Plano Horizontali*, sit *parallelum*, aut applicatum.

46 Basis figuræ *in ordine ad ipsam figuram* est quodlibet ejus latus, quod arbitrariè in Basim assumi potest: in quantùm scilicet videtur, reliqua latera, ei quomodolibet insistentia, ac figuram terminantia, substentare. Sicque quodcumque figuræ latus potest facilè in Basim, juxtà Geometræ beneplacitum, assumi. Ut in figura quacumque A B C latus A B, potest dici *Basis in ordine ad locum*, nempe si fieret *Plano Horizontali æquidistans*. Et potest quoque dici *Basis in ordine ad ipsam figuram*, si scilicet ut talis ad tuum assumatur arbitrium.



47 *Vertex* seu *Apex* figuræ (qui solùm in angularibus invenitur) dicitur illè *angulus*, qui Basi est numerò oppositus *suprà n.* 26; unde non reperitur nisi in figurâ imparem habente numerum angulorum, putà in *Trigono*, *Pentagono*, *Eptagono &c.*

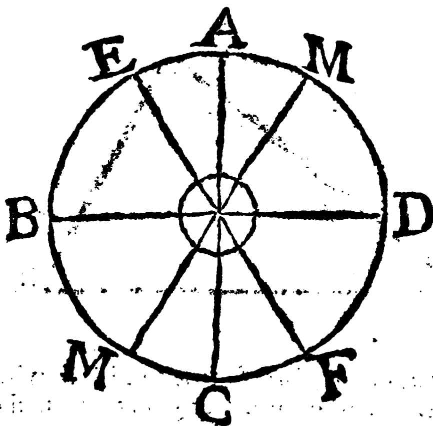
48 Cathetus seu *Altitudo cujusque figuræ*, est *linea perpendicularis à Vertice ad Basin deducta*: hoc est, quod ex Apice incidens in Basin duos æquales angulos Utrinque causat. Undè solùm in figuris angularibus imparem habentibus laterum numerum invenitur. *Def. 4. 6.*

49 *Axis* est *linea* recta per centrum figuræ traducta, circa quam immobiliter manentem figura circulariter *moveri* valeat, vel intelligatur.

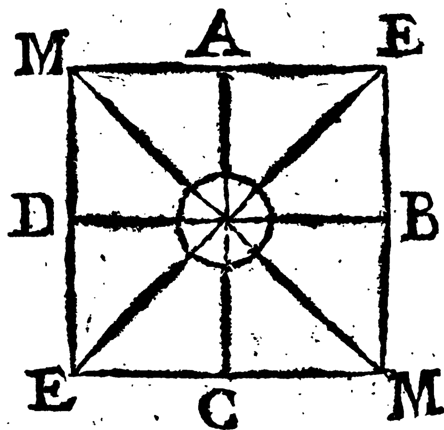
50 *Poli* dicuntur *extrema* axis, super quos fixè immo-

mobiliterque manentes circulariter revolvitur figura, cujus sunt Poli.

51 Magnitudines seu partes *disparatæ* in figurâ, (quas simpliciter non admittunt, nisi quæ propriè cētrum obtinent, figuræ *suprà n.*36.) dicuntur duæ illæ, quæ intra figuræ dimidium à Diametro discissum existentes, æqualiter distant hinc-inde ab orthogonali Diametro. Ut in quavis figura A B C D partes E, & M dicuntur *disparatæ*, quia intra figuræ medietatem B A D, à Diametro B D disjunctam, existentes, æqualiter distant ab orthogonali Diametro A C.



52 Magnitudines seu partes *oppositæ*, quæ & *diametraliter oppositæ*, interdùm dicuntur, in figurâ censentur, quas hinc-inde à centro ejus attingit Diameter. Ut in præcedentibus figuris, puncta A, C: B, D: M, M: E, E. dicuntur *opposita*, attinguntur enim hinc-inde à Diametris A C, D B, &c. Vel dicuntur, quæ hinc-inde per ambitum figuræ æqualiter inter se distant: ut dictum est *suprà n.*36. Ex A enim in C eadem est distantia per B ac per D, & sic de singulis.



53 Denique ut omnia, quæ de figurâ dici debent ordinatâ seriè perpendantur, quadrupliciter hìc figuram consideramus: nimirùm *entitativè*, *materialiter*, *formaliter*, & *respectivè*.

54 Figura *entitativè* sumpta, importat dumtaxat genus magnitudinis comprehensæ: quæ scilicet, vel est Superficies, vel Corpus, ut dictum est; sicque figura entitativè sumpta, vel est *plana*, vel *solida*: de quo satis suprà.

55 Figura *materialiter* sumpta importat dumtaxat ejus *Aream*(*suprà n.*30.):idest spatium illud figuræ sub extremis undique comprehensum, & circumscriptum; Ut spatium A B C D à magnitudine circumscribente A B C D undique contentum.

56 Figura *formaliter* sumpta, importat ejus essentiam seu totum id abstractum, per quod quælibet figura in suâ constituitur specie: nempe laterum, & angulorum, numerum, & valorem, nec non eorum habitudinem, quam ad se invicem dicunt, sive ad centrum; quibus inde figura nomen accipit, atque in hac vel illa ultimâ constituitur specie, ac tandem à cæteris distinguitur. Pro qua figuræ acceptione sequentes condimus paragraphos.

57 Figura *respectivè* sumpta, importat mutuam *relationẽ*, secundùm quam una figura alteri *comparatur*. Duæ autem figuræ possunt invicem comparari, aut *in æqualitate materiæ* (subaudi purè *intelligibilis*, circa quam est pura Mathesis), aut in *æqualitate formæ* (subaudi *specificæ*, secundùm quam una figura ab alterâ specie distinguitur), aut in *æqualitate Rationis*.

58 Figuræ in *æqualitate materiæ* comparatæ dicũtur, vel *entitativè æquales*; vel *materialiter æquales*.

59 Figuræ in *æqualitate formæ*, dicuntur, vel *formaliter æquales* seu *similes*, vel *simpliciter æquales*.

60 Figuræ verò in *æqualitate Rationis* comparatæ dicuntur *Reciprocæ*.

61 *Entitativè æquales*, patet, eas dici, quæ aut *plana* sunt, aut *solida*.

62 *Materialiter æquales* dicuntur, vel *Isoperimetra*, vel *Isocapaces*.

63 *Isoperimetra* figuræ dicuntur, quæ *parem* habent inter se *circumferentiam*, vel *ambitum*. Ut Quadrangulum sex palmos habens in ambitu, dicitur *isoperimetrum* ver: gra: cum Triangulo, vel Circulo, vel Poligono, aut cuicumquè alteri figuræ planæ habenti in ambitu seu circumferentiâ sex etiam palmos. Hoc est si quatuor latera, Quadranguli ambitum constituentia, in unam eamdemque lineam coaptata, adæquent adamussim tribus lateribus Trianguli, aut aliis cujuscumque figuræ, in unam eamdemque lineam similiter coaptatis; illæ profectò figuræ dicuntur *isoperimetræ*. Idem quoque de solidis quibuscumque hac æqualitate præditis intelligito.

64 *Isocapaces* figuras, hic vocamus, quarum Areæ sunt *æqualis capacitatis*. Ut si Trianguli Area sit octo

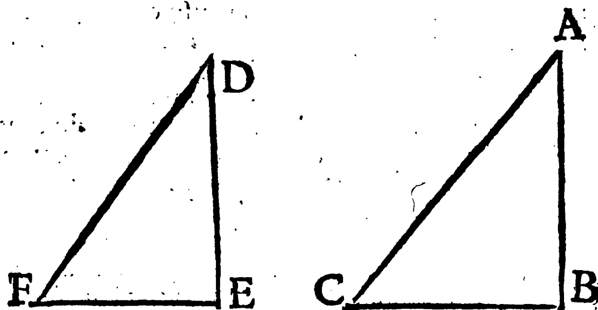
pe-

podum quadratorum, totidemque sit Area Quadrati sive alterius cujuscumque figuræ ei *entitativè* æqualis; placet hìc eas figuras *isocapaces* appellare; & similiter dicito de solidis.

65 *Formaliter æquales* figuræ dupliciter hìc considerari possunt, nimirum, uno modo *largè* & *genericè*; alio modo *propriè* & *specificè*. Primo igitur modo, quatenus scilicet sub eodem complectuntur genere, quod immediatè participant, possent dici æquales omnes figuræ rotundæ, invicem comparatæ, omnes angulares, omnes quadrilateræ, omnes trilateræ &c. at cùm earum quæque suas adhuc species, in quas dividitur, habeat, & inter quas strictior, ac proprior inde succedat comparatio; nulla propterea de hujusmodi æqualitate mentio sit. Secundo autem, ac *proprio* loquendi modo censentur formaliter æquales figuræ, cùm scilicet sub eâdem athomâ formâ comparantur: quæ non est ultrò in alias divisibilis species, sed solùm in plura individua, numericè, & materialiter tantùm inter se distincta, in quibus omnibus eadem omnino sit partium sibi correspondentium similitudo. Quare *similes* figuræ nuncupantur ab Euclide, qui eas rectilineas sic definit.

66 *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ, & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales sunt, proportionalia*. Unde & æquiangulæ quoque dictæ sunt, non quidem in eo sensu, quòd ipsarum quævis suos omnes habeat angulos inter se æquales, ut dictum est *suprà n.* 23. benè verò, quòd singuli anguli unius figuræ sint singulis alterius æquales. Ut duo Triangula A B C, D E F dicuntur *similia*, si angulus A fuerit æqualis angulo D, & angulus B angulo E, & angulus C angulo F. Sitque ut latus A B, ad latus B C: ita latus D E, ad latus E F; Et ut latus B C, ad latus C A: ita latus E F, ad latus F D. Quod est, latera esse circa æquales angulos proportionalia. Sic quoque universi Circuli sunt formaliter æquales; similiter cuncta *Triangula isopleura*; omnia *Quadrata*; omnes *Cubi* &c. in quibus singulis eadem correspondenter est singularum partium dispositio. *Def. 1. 6.*

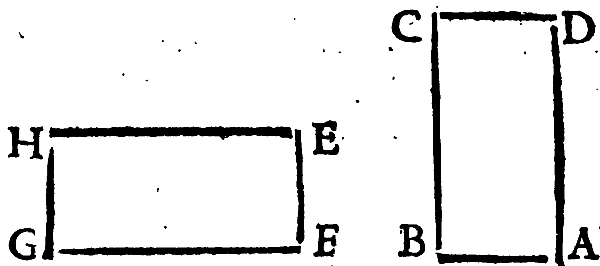
67 In *similibus* autem figuris latera quæ opponuntur æqualibus angulis fiunt *homologa* (*suprà cap.* 2. §. 2. *n.* 45. *&* *Euclid. def.* 11. 5.); quæ scilicet in proportione fiunt vel simul *antecedentia*, vel simul *consequentia*. Ut in eâdem analogiâ, cùm dicitur sicut A B, ad B C: ita D E, ad E F; jam vides latus A B, quod opponitur angulo C, fieri Antecedens Rationis A B, ad B C; & latus D E, quod opponitur angulo F æquali angulo C, fieri Antecedens Rationis D E, ad E F. Et similiter de Consequentibus B C, E F, oppositis æqualibus angulis A, & D; Quod est, latera A B, D E: vel B C, E F esse *homologa*.



68 *Simpliciter æquales* figuræ dicuntur, quas non distinguit nec genus, nec species, nec materia, nec forma; sed solus numerus: sunt enim æquales, tum *entitativè*, tum *materialiter*, tum *formaliter*; ut duo Circuli æquales habentes Diametros; duo Triangula singulos singulis æquales habentia, tum angulos, tum latera, &c. Duo Quadrata æquales radices habentia; & sic deinceps.

69 *Reciprocæ autem figuræ sunt, cùm in utrâque figurâ antecedentes & consequentes Rationum termini* Def. 2. 6.
,, *fuerint*. Hoc est, *ut exponit P. Dechales.* tunc figu-
,, ræ dicuntur reciprocæ cùm in unâ figura est Ante-
,, cedens Rationis, cujus Consequens est in aliâ: & vi-
,, cissim in secundâ est Antecedens alterius Rationis,

„ cujus Consequens est in primâ. Vel dum compara-
„ tio desinit in figurâ, in quâ incæperat. Ut in duobus Parallelogrammis, si esset ut DA, ad EF: ita GF, ad BA. figuræ essent *reciproca*.



70 Insuper figurarum genus aliud est *Regulare*, aliud est *Irregulare*.

71 Ad *Regularium* genus figurarum rigorosè sumptum spectare censentur illæ dumtaxat figuræ, in quibus singulis est omninò sive angulorum, sive laterum ad invicem, sive horum diametraliter oppositorum, sive circumferentiæ ad centrum, æqualitas; cujusmodi in Angularibus est omnis figura æquiangula, vel æquilatera *suprà n.* 23. 24. & in rotundis, omnis Sphæra, Circulus, Ellipsis, Sphœrois, Cylindrus, Conus &c.

Scholium. Dixi *rigorosè sumptum*, quia dantur aliquæ figuræ, quæ licèt non habeant præcisè omnimodam hujuscemodi æqualitatem, Regularibus tamen passim adscribi solent, maximè quia nonnulla servatur in eis sive angulorum æqualitas, sive laterum proportio, sive rectitudo aut planities, aut curvitas, quæ matheseos legibus, ac usibus ritè deserviat: cujusmodi sunt *Semirculi*, *Quadrantes &c. Triangula &c.* Ut processu doctrinæ facilè addiscetur.

72 Ad *Irregularium* verò genus pertinent reliquæ omnes, quæ per omnimodam laterum vel angulorum inter se dissimilitudinem extra omnem Matheseis regulam sine lege vagantur. Velut illæ, quæ pro libito imperitæ manûs in chartâ temerè proscribuntur: Unde ob nimiam angulorum difformitatem, terminorumque

10-

totalem inter se discomparationem nullius sunt in mathematibus usùs, nisi priùs ita convenienter aptentur, ut tandem ad regulares figuras revocari videantur.

73 Cœterum quia figura quæcumque sub his quatuor reperiri combinationibus debet: ut diximus *suprà n.* 13. nimirum, quæ sit vel *plana-rotunda*, vel *plana-angularis*, vel *solida-rotunda*, vel *solida-angularis*; ideò de figurâ in specie nunc tractaturi, sequentes quatuor subjungimus paragraphos singulos singulas combinationes exponentes. Cùm autem rotundæ figuræ tum pulchritudine, tũ capacitatè, uniformitate &c. angularibus præstent, congruenter initium facimus de rotundis: volentes utique nonnulla, quæ de planis hìc dicentur figuris, inspectâ debitè laterum angulorumque naturâ, & de solidis quoque dicta, intelligi; proptereaq; sit.

De Figurâ in Specie.

§. II.

De Figuris Planis-Rotundis.

1. FIgura *Plana-rotunda*, ut dictum est *suprà n.* 14. est superficies sub unicà curvâ lineâ comprehẽsa, atque ab eâ undequaque circumscripta.

2 Præcipuæ, ac frequentiores figuræ inter Planas-rotundas sunt *Circulus*, & *Ellypsis*; quapropter satis nobis cum Euclide, si de his solùm hìc sermo fiat; de cæteris enim parva aut nulla est mentio, cùm ad has facilè habeant reduci.

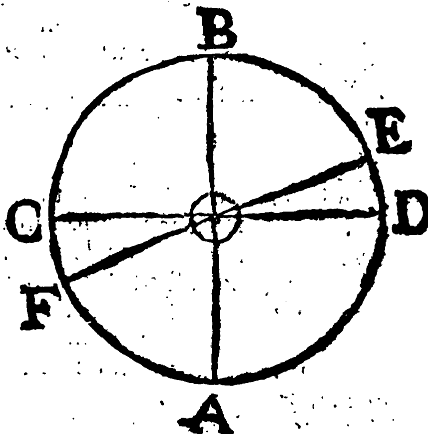
3 *Circulus*, omnium planarum figurarum facilè princeps: utpotè qui in omnimodâ æqualitate solummodò sibi soli æqualis, principioque carens atque fine, pulcherrimè symbolum præsefert æternitatis, ac dignissimam præ cæteris excellentiam sibi vendicare videtur:
Def. 15. 1. sic ab Euclide definitur. *Circulus est figura plana sub unâ lineâ comprehensa, quæ peripheria appellatur: ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.* Ut si in figurâ rotunda A D B C, omnes rectæ lineæ

O A,

OA, OB, OC, OD, & aliæ quotcumque ab uno puncto O, intra ipsam figuram posito, ad circumferentiam usque projectæ, fuerint inter se æquales: talis figura erit *Circulus*. Ubi vides, quàm falsò hìc putare soleant indocti, Circulum, solam esse curvam lineam, quæ figuram dicitur comprehendere. Cùm ex definitione satis liqueat, Circulum esse superficiem planam sub unicâ curvâ lineâ comprehensam &c. hancque verò lineam circumterminantem dici peripheriam Circuli. Linea quippe, cùm propriè figura dici non debeat (ex dictis suprà n. 3.), consequenter Circulus esse nequit.

Cogitamus autem, Circulum per lineæ motum generari: si nimirum, uno rectæ lineæ OE extremo O immobiliter manente, alterum E in gyrum duci intelligatur: tunc enim linea circumacta suo fluxu superficiem satis generare videtur, comprehensam equidem à peripheriâ ADBC, quam describit alterum extremum E circumductum.

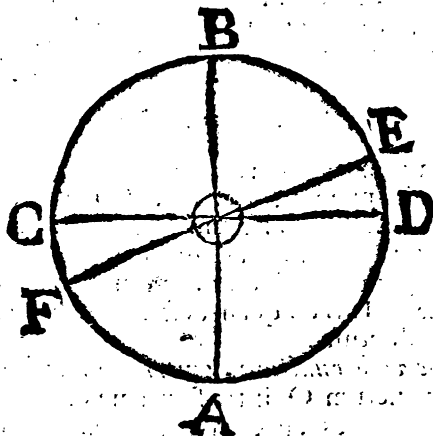
4 *Hoc verò punctum, centrum Circuli appellatur.* Def. 16. I.
Hoc est punctum O intrà figuram positum, ex quo rectæ illæ æquales ad circumferentiam usque protrahuntur.



5 *Area* Circuli dicitur totum illud mensurabile spatium à peripheriâ comprehensum.

Dia-

6 *Diameter autem circuli est, recta quædam linea per centrum ducta, & ex utrâque parte in Circuli peri-*
Def. 17. 1. *pheriam terminata, quæ Circulum bifariam secat:* idest in duo æqualia dividit. Ut est recta quæcumque A B, vel C D, E F &c.



7 *Semidiameter* Circuli est ejus media Diameter: hoc est recta quæcumque à centro Circuli ad peripheriam usque protracta: quæ & Circuli *Radius* appellatur; ut O B, vel O C &c.

8 *Arcus* promiscuè dici solet, tum de portione peripheriæ Circuli, tum de portione ipsius Circuli.

9 Arcus intelligitur de portione peripheriæ, velut in praxibus geomitricis, quando jubentur fieri *arculorum sectiones*, vel mensurantur angulorum valores.

10 Arcus verò, quando dicitur de portione ipsius circuli, sic definitur: Arcus est illa Circuli portio, quæ sub duabus semidiametris quomodolibet in centro sese tangentibus, & peripheriâ ab eis assumptâ seu interceptâ, comprehenditur. Dividitur autem in *Semicirculum, Quadrantem, & Sectorem.*

11 *Semicirculus est figura, quæ continetur sub Diametro, & sub eâ lineâ, quæ de Circuli peripheriâ aufer-*
Def. 18. 1. *tur,* hoc est medius Circulus, seu illa Circuli portio, quæ sub

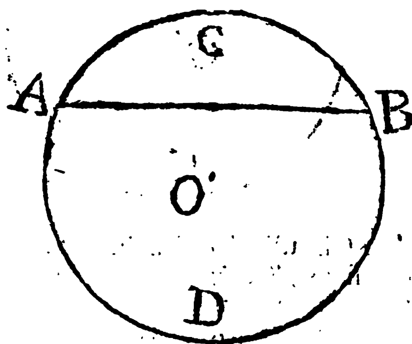
sub Diametro, & semiperipheriâ, comprehenditur. Ut B D A, vel B C A,

12 *Quadrans* Circuli, dicitur arcus ille seu Circuli portio, quæ sub duabus semidiametris in centro perpẽdiculariter sibi mutuò insistentibus, & quartâ peripheriæ parte, comprehenditur. Ut Quadrans B O D, aut D O A &c.

13 *Sector autem Circuli est, cùm ad ipsius Circuli centrum constitutus fuerit angulus; comprehensa nimirum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheriâ ab illis assumptâ*. Hoc est, *Sector* seu *Schinda* Circuli, qui & *arcus* absolutè Circuli passim vocari solet, dicitur quælibet Circuli portio, quæ sub duabus semidiametris in centro *obliquè* sibi mutuò insistentibus, & competente peripheriæ parte, comprehenditur. Ut arcus E O B, vel E O D, vel E O C &c. Def. 9. 3.

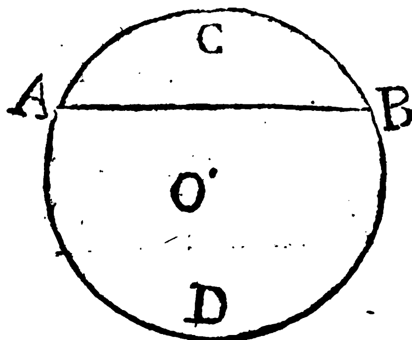
14 *Chorda* Circuli, dicitur quæcumque recta, quæ inter duo peripheriæ puncta extra centrum Circuli ducta, eum dividit in duas partes inæquales; quæ majus & minus *segmentum* vocitantur. Dicitur aliter *subtensa*, quia peripheriæ extrema connectens, eam subtendere videtur, quemadmodum in minore Ballistâ funis subtendit arcum ferreum. Ut linea recta A B in Circulo A C B D.

Coroll. Chorda distinguitur à *Diametro*; quia Diameter debet semper Circuli centrum pertransire; Chorda verò nunquam,



15 *Segmentum Circuli est figura, quæ sub rectâ lineâ, & Circuli peripheriâ comprehenditur.* Hoc est, illa Circuli pars, quæ sub Chordâ, & assumptâ seu competente peripheriæ parte, comprehenditur. Unde patet, quòd Segmentum non confunditur cum Semicirculo per hoc scilicet, quòd utraque figura sub rectâ lineâ, & peripheriâ, dicitur comprehendi. Signanter enim ponitur ab Euclide ly *sub Diametro* in Semicirculo, & ly *sub rectâ lineâ* in Segmento. Nam etsi utraque sit linea recta; *Diameter* tamen necessariò centri perfixionem exposcit, quam mera *recta linea* non requirit, ut est Chorda; ideoque *Segmentum* licèt largo modo, & impropriè dici posset etiam de Semicirculo, propriè verò illum non includit: cùm hìc pro *rectâ lineâ* solùm intelligatur Chorda, quæ habet Circulum extra centrum secare. Relinquitur ergo, quòd Segmentum hìc tantùm dicatur de duabus partibus inæqualibus, in quas Circulus à Chordâ dividitur, quæ majus scilicet & minus Segmentum nuncupantur. Majus autē Segmentum dicitur, intra quod Circuli centrū O invenitur. Ut Circuli pars A D B; minus verò Segmentum dicitur intra quod non est Circuli centrum. Ut Circuli pars A C B.

Def. 19. 1. & 5. 3.



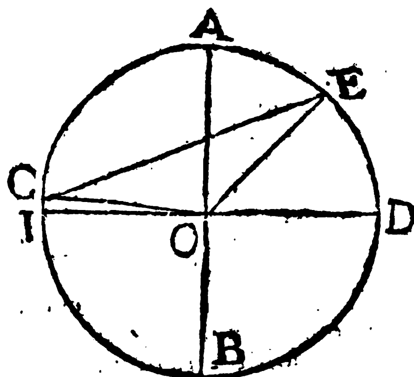
16 *Axis* Circuli est unica linea recta centrum Circuli pertransiens, & ejus plano perpendiculariter insistens, circa quam fixè manentem, Circulus in gyrum secundùm suam peripheriam revolvi valeat.

17 Poli Circuli sunt extrema ejus Axis.

Ex

18 Ex Antiquorum placitis, universalis est apud omnes Circuli divisio in 360 æquales partes, quas *gradus* vocant.

19 Est autem *gradus*, Circuli portiuncula, inter duas semidiametros, & trecentesimam-sexagesimam peripheriæ partem, comprehensa. Velut Circuli portio I O C, quarum 360 componunt totum Circulum.



Quilibet autem *gradus* in 60. *prima minuta* seu *Scrupula* æqualia pari modo subdividitur; & quodlibet *minutum primum* in 60. *minuta secunda*; & quodlibet *minutum secundum* in 60. *tertia*; & quodlibet *tertium* in 60. *quarta minuta*: & ita consequenter per sexagenariam subdivisionem in infinitum.

Monitum. Hanc autem, animadvertas oportet, Circuli divisionem non cadere supra figuram *materialiter* sumptam *suprà n.* 55. ubi solùm consideratur longitudo, & latitudo superficiei in Circulo comprehensæ, taliter ut, quò latior seu amplior fuerit Circulus, eò plurium obtineat partium divisionem; sed solùm attendi ex parte suæ *formæ*, quæ, cum ab omnibus Circulis æqualiter, atque eodem prorsus modo, contrahatur, facit, quòd, sicut omnes Circuli sub unâ eâdemque maneant specie, sic pariter una cunctis eademque competat formalis divisio, in grad: scilicet 360. &c. Unde monendi sunt hìc Tyrones, qui fortè putant, cùm dicitur, Circulum esse alio majorem, quòd plures,

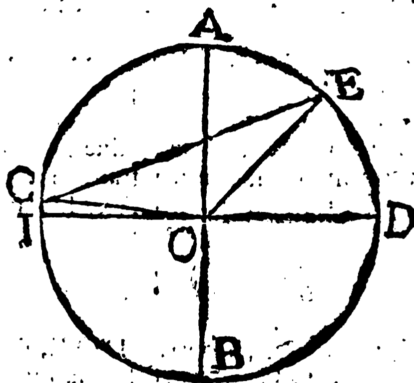
quàm ille, contineat gradus. Non enim Ratio submultiplex gradùs ad Circulum respicit absolutum materiæ excessum, benè verò formalem partium dispositionem.

Est namque gradus pars aliquota seu mensura Circuli non *materialiter*, sed *formaliter* sumpti *suprà n.* 56. nimirùm, trecentesima-sexagesima pars formæ Circuli. Unde, cùm in omnibus, & singulis Circulis tum majoribus, tum minoribus eadem sit omninò forma, cujus semper intelligitur dari ejusmodi pars trecentesima-sexagesima, liquidò constat omnes Circulos cujuscumque magnitudinis in 360. gradus æqualiter esse divisos: gradusq; omnes ejusdem esse rationis inter se. Non enim gradus dicitur pars in ordine ad materialem Circuli compositionem, benè verò ad formalem ejus divisionem; neque gradus habent pro majoritate Circulorum multiplicari secundùm numerum, sed solùm augeri secundùm molem. Ideoque sive major, sive minor sit Circulus, non propterea plures aut pauciores continebit gradus, sed semper habet uniformiter dividi in 360. partes æquales, quarum quælibet, nullâ mole consideratâ, gradus est, & se habet ad suum Circulum cujus est pars, ut 1, ad 360. Unde inæqualitas illa Circulorum de materiali se habet: & solùm sequitur in majore Circulo, ampliores quoque esse gradus, non plures: in minore verò breviores, non pauciores: omnes tamen compleri numero 360. sicque Circulus dicitur alio major non *formaliter*, sed *materialiter*.

20 Quantitas igitur seu mensura arcùs formaliter accepti (sive Semicirculus sit, sive Quadrans, sive Sextans, sive alia quæcumque Circuli portio ex dictis) nonnisi multitudinem graduum in eo contentorum importare videtur. Unde arcus dicitur alio major, non quia majoris Circuli sit arcus, sed quia plures, quàm ille, continet gradus: sive latiores, sive angustiores fuerint gradibus alterius Circuli, nil interest, modò in eis attendatur Communis Ratio partis aliquotæ ad suum totum, nempe sub-trecentesima-sexagecupla. Ideòque quilibet Semicirculus sive major, sive minor, cùm sit medietas Circuli, semper continet grad. 180, dimidium scilicet 360; quilibet Quadrans, cùm sit quarta pars Circuli, continet grad. 90; & similiter Sextans grad. 60. &

sic

ſic deinceps de Triente, Quincunte &c. quæ cùm ſint partes aliquotæ ſeu menſuræ abſtrahentes ab omni ſubjecto, ſolàm formam reſpiciunt, in ordine ad quam, ſingulæ ſub Ratione geometricâ comparantur, non verò arithmeticâ. Ut licèt numerus 60, qui eſt ſexta pars numeri 360, ſit major numero 6, qui eſt ſexta pars numeri 36: quod eſt eſſe inæquale in Ratione arithmeticâ; tamen in ratione menſuræ ſeu partis aliquotæ ſunt æquales, uterque ſcilicet ſubſextuplus. Nã ſicut 60 ſexties ſumptus adæquat præcisè totum 360; ita pariter 6 ſexties ſumptus adæquat præcisè totum 36. quod eſt eſſe æquale in Ratione geometricâ.



Summarium pro Circulo.

21 Cœterùm ut promptiora memoriæ fiant, quæ de Circulo ſunt dicta, maximè quia eorũ mẽtio frequentiſſima eſt in totâ Matheſi, cuncta unico ſub exemplo duximus repetenda.

Sit igitur pro exemplo Circulus A D B C, qui *entitativè* conſiſtit in planâ illâ ſuperficie: & *formaliter* conſtituitur in ſuâ athomâ ſpecie per hoc, quòd ſuperficies illa taliter ſit ab unicâ curvâ lineâ, quæ peripheria dicitur, comprehenſa, ut omnes rectæ lineæ A O, E O, D O, B O, C O, & aliæ quotcumque ab ipsâ peripheriâ in unum punctum O intra figuram poſitum confluentes, ſint æquales.

Centrum eſt punctum O, à quo omnes rectæ O A, O D, O B &c. ad circumterminantem Circuli peripheriam A D B C ductæ, ſunt æquales. At-

At quia totum hoc æqualiter cuivis competit Circulo: sequitur, omnes Circulos esse *formaliter æquales*, omnibusque singulis eamdem competere divisionem grad. 360.

Area est, totum illud spatium ab ipsâ peripheriâ A D B C undequaque comprehensum: in quo consistit totũ esse *materiale* Circuli: quæ, cùm diversimodè inæqualis interdum inveniatur in Circulis, facit, Circulos *materialiter* dici majores aut minores.

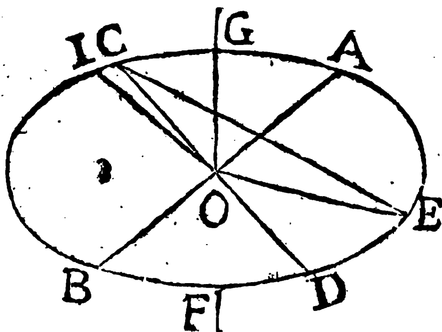
Diameter est, recta A B, vel C D, sive alia recta quæcumque centrum O pertransiens, & in oppositis peripheriæ partibus utrobique terminata, quæ Circulum secat in duas æquales partes, nempe in duos Semicirculos.

Semidiameter sive *Radius* est, recta quæcumque O A, O D, O B, &c. à centro O in peripheriam projecta.

Semicirculi sunt, Circuli medietates A D B, A C B, vel C A D, C B D, sive quævis aliæ, quas Diameter disjungit; continentque singuli grad. 180.

Quadrans est, Circuli portio A O D, sive A O C sub duabus semidiametris perpendiculariter in centro sibi mutuò insistentibus, & quartâ peripheriæ parte, comprehensa: quarum quælibet, quarta pars est Circuli: continetque grad. 90.

Arcus est, quævis Circuli portio D O E, sive E O A, sive E O C, sive C O I, &c. sub duabus semidiametris in centro obliquè sibi mutuò insistentibus, & competente peripheriæ parte, comprehensa.



Sex-

Sextans Circuli est, ejus sexta pars E O D continens grad. 60. Sicut & Quincunx est quinta ejus pars, nempe grad. 72.

Gradus est, Circuli portiuncula velut I O C, quæ est trecentesima-sexagesima ejus pars: quæ in 60 prima minuta similiter dividitur &c.

Chorda seu *subtensa* est, recta C E Circulum dividens in duas inæquales partes C A E, C B E, quarum major C B E vocatur *Segmentum maius*, intra quod semper invenitur centrũ Circuli O; minor verò C A E vocatur *Segmentum minus*.

Axis est, recta G F Circuli centrum O pertransiens, ejusque plano perpendiculariter insistens, circa quam immobiliter manẽtẽ totus Circulus in gyrũ revolvitur.

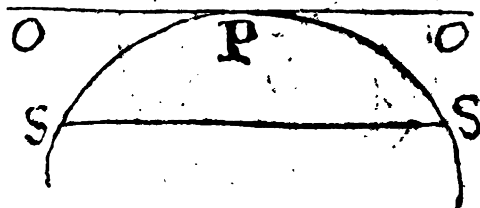
Poli sunt puncta G, & F, extrema scilicet Axis.

Præterea nonnulla de Circulis cum Euclide sunt adhuc definienda.

22 *Æquales Circuli sunt, quorum Diametri sunt æquales: vel quorum quæ ex centris rectæ lineæ sunt æquales*. Definit hìc Euclides, qui sint Circuli *simpliciter* æquales, nempè qui æquales habeant Diametros, vel Semidiametros, Aream, &c. Nam quòd omnes Circuli, sive æquales, sive inæquales Diametros habentes, sint *formaliter* æquales, ambigit nemo. *Def. 1. 3.*

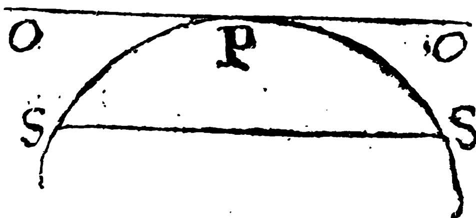
23 *Circuli sese mutuò tangere dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.* Sed tantùm in puncto sese tangunt. *Def. 3. 3.*

24 *Recta linea Circulum tangere dicitur, quæ, cùm Circulum tangat, si producatur, Circulum non secat.* Ut linea O P, quæ Circuli peripheriam S P S tangit in puncto P: atque ultrò producta in O illum non secat. Hæc autem linea vocari solet absolutè *Tangens*, ut insinuavimus *suprà cap. 4. §. 2. n. 48.* *Def. 2. 3.*

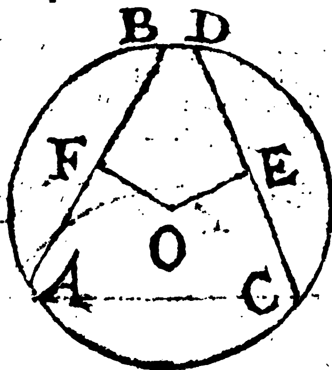


Re-

25 *Recta linea in Circulo accommodari seu coaptari dicitur, cùm ejus extrema in Circuli peripheriâ fuerint.*
Def. 7. 4. Ut in Circulo SPS linea recta SS dicitur accommodari: quando ejus extrema S, & S Circuli peripheriæ fuerint applicata, atque in eâ constiterint, & hujuscemodi est omnis Chorda in Circulo.

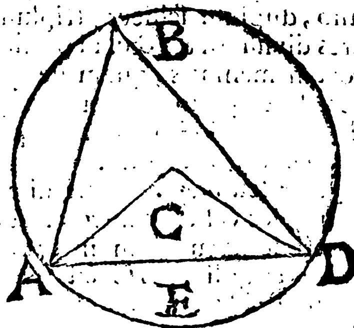


26 *In Circulo æqualiter distare à centro recta lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur sunt æquales. Longiùs autem abesse illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.*
Def. 4. 3. Ut in Circulo ABCD æqualiter à centto O distare dicuntur duæ Chordæ AB, DC: si rectæ OE, OF, quæ sunt perpendiculares ad illas, fuerint inter se æquales. Si verò una ex perpendicularibus OE, OF, major fuerit alterâ: tunc longiùs à centro distare dicitur ea Chorda, in quam incidit major perpendicularis.



27 *In segmento autē angulus est: cūm in segmenti peripheriâ sumptū fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ, quæ Segmēti basis est, adjūctæ fuerint rectæ lineæ; is, inquam, angulus ab adjunctis illis lineis comprehensus*. Ut angulus A B D, quem in Segmento A B D causant rectæ lineæ A B, D B, in peripheriæ puncto B simul coeuntes, & in extremis Basis Segmenti punctis A & D terminatæ, dicitur *angulus esse in Segmento*. Def. 7. 3.

28 *Cùm verò comprehendentes angulum rectæ lineæ, aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur*. Hoc est, *angulus insistere* dicitur peripheriæ, cui opponitur. Ut in eâdem figurâ, angulus A B D dicitur *insistere* peripheriæ A E D, quia illi opponitur. Def. 8. 3.



29 Angulus *ad-Centrum* dicitur, quem faciunt duæ rectæ lineæ mutuò inclinatæ, & in Circuli centro sese tangentes. Velut duæ Semidiametri C A, C D, Sectorem A C D continentes.

30 Angulus *ad-peripheriam* dicitur, quem causant duæ rectæ in uno peripheriæ puncto sese tangentes, atque in Circulo *coaptatæ* (*suprà n. 25. & Eucl. def. 7. 4.*). Velut duæ Chordæ A B, D B sese tangentes in peripheriæ puncto B, & in Circulo *accommodatæ* seu *coaptatæ*, ut vides.

31 *Similia Circuli Segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli inter se sunt æquales*: Hoc est, quando *anguli*, qui in utroque *Segmento esse* dicuntur, sunt inter se æquales. Def. 10. 3.

Digressio

De Valore Anguli.

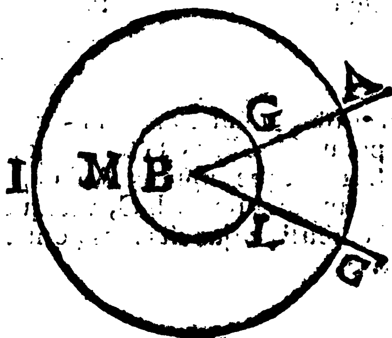
Explicatâ jam Circuli naturâ, locus est, ut aliqua de valore anguli, sicut toties promisimus, seriùs expendamus.

32 Sed prænotandum, cum P. *Dechales*, & communiter omnibus; angulum, pro ut scilicet mutuam
,, importat magnitudinum inclinationem, verè & pro-
,, priè quantitatem non esse: cùm idem maneat angu-
,, lus, etiam si prolongentur, aut abbrevientur lineæ
,, ipsum causantes. Unde cùm ei proprietates tribui-
,, mus quantitatis, putà cùm dicimus, angulum esse
,, majorem alio, duplum scilicet, triplum &c. vel in
,, duas aut tres dividi partes &c. id potiùs intelligendum est de eorum mensuris, quàm de ipsis angulis: idest potiùs de valore, qui formaliter importatur in angulo, quàm de lateribus ipsis inclinatis, quæ causaliter, & materialiter habentur in angulo.

33 *Valor* igitur seu *mensura* anguli est quantitas arcùs, ex anguli apice velut è centro, ad quamvis certam Semidiametri longitudinem inter ejus latera descripti. Ut valor anguli A B C est quantitas arcùs A B C, ex centro B ad quamcumque Semidiametrum B A ducti, atque inter ejus latera B A, B C descripti. Qui quidem arcus cùm sit portio Circuli, in suos habet gradus, & minuta dividi, ex dictis. Ideòque valor anguli videtur solùm numerum, graduum, & minutorum arcum conficientium importare, ut insinuavimus *suprà n.* 20. Ut si arcus A B C gradibus 60. constare dicatur, hic graduum numerus, erit anguli A B C valor: hoc est, angulus A B C valebit grad. 60.

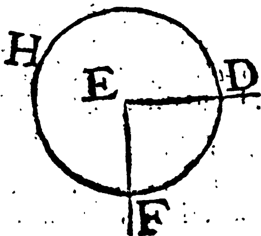
34 Ex quo patet, quòd angulus censetur alio major; non quia longiora sint latera ipsum conficientia, neque quòd majoris Circuli sit arcus ipsum metiens; sed attenditur solùm ex hoc, quòd latera ex eâ parte quâ in amplitudinem surgunt, sub æqualibus longitudinibus determinatâ, magis ab invicem discedant in uno angulo quàm in alio; quæ quidem discessio mensurari de-

bet

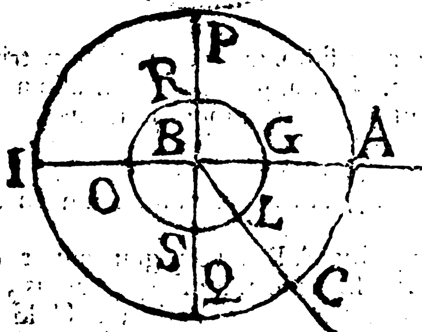


bet per arcum sub æqualibus Semidiametris inter illa descriptum. Unde angulus censetur alio major aut minor, pro ut major aut minor fuerit quantitas arcûs angulum utrumque metientis, in ordine ad suum Circulum, cujus est arcus: hoc est, quò major aut minor fuerit numerus graduum & minutorum in eo contentorum.

Ut Angulus ABC ver: gra: minor est angulo DEF, etsi lineis causetur longioribus, majorisque Circuli polleat arcu, peripheriaq; AC longior videatur alterâ DF: minor inquam dicitur, cùm arcus ABC, (qui est valor anguli ABC) sit minor pars sui Circuli ACI, quàm sit arcus DEF, (qui est valor anguli DEF) pars sui Circuli DFH: hic enim ver: gra: est quarta pars sui Circuli, ille verò sexta; ideoque cùm essent plures gradus in Quadrante DEF, quàm in Sextante ABC, sequitur, angulum DEF majorem esse angulo ABC, quia plures, quàm ille, valet gradus.



Quod facilè manifestatur, si arcuum quantitates describantur sub æqualibus Semidiametris E D, B G, ideſt ſub unâ eâdemque Circini apertione, ut fiant iſocapaces Circuli D F H, G L O. Tunc enim perſpicuum erit, angulum D E F majorem eſſe angulo G B L, prout Quadrans G B S major eſt Sextante G B L. Subindeque angulus A B C, qui eſt formaliter idem cum angulo A B C, uterque ſcilicet eadem pars ſui Circuli, cujus eſt arcus, erit etiam minor angulo D E F.



Quòd autem Anguli A B C, G B L, ſint formaliter idem, ſi neges, ſic oſtendi poteſt.

Sint enim Circuli P A Q I, & R G L O concētrici; quorum ſcilicet idem ſit Centrum B: ducanturque Diametri P Q, A I Orthogonales. Tunc Diametri ſunt communes utrique Circulo. Nam recta R S Diameter minoris Circuli eſt pars rectæ P Q Diametri majoris Circuli, & ſimiliter Diameter G O, eſt pars Diametri A I. Quare arcus P A Q majoris Circuli, & arcus R G S minoris, ſunt Semicirculi, ac proinde æquales: arcus verò A B Q, & G B S ſunt Quadrantes; ſubindeq; æquales. Ergo ſunt æquales, maximè quia ex communibus Diametris cauſantur; adeòque ſicut ſe habet Semicirculus P A Q, ad Semicirculum R G S: ita Quadrans A B Q, ad Quadrantem G B S. Cùm igitur recta C B ſit etiam Semidiameter communis

utri-

utrique Circulo; Erit ut Quadrans A B Q ad Quadrantem C B S, ita quilibet arcus A B C ad arcum C B L; hoc est, sub eâdem Ratione æqualitatis. Erit ergo arcus A B C eadem pars sui Circuli A I C, ac fuerit arcus G B L pars sui Circuli G O L. Quod est esse formaliter idem.

Coroll. I. Ex anguli cujuscumque rectilinei Vertice, velut è centro, quotquot arcus sive ampliores sive breviores inter ejus latera describantur, omnes sunt *formaliter* idem; maximè quia nonnisi unam eamdemq; certam mensuram omnes important.

Coroll. II. Angulus *contingentiæ suprà cap.* 4. §. 2. *n.* 48. nullius est certi valoris: sed quotquot arcus è centro inter ejus latera describantur, omnes erunt formaliter diversi, & inæquales; idest alter altero formaliter major aut minor: pro ut longior aut brevior fuerit eorum Semidiameter. Quò enim brevior assumitur Semidiameter, eò minor semper angulus evadit ob mutuam laterum disconvenientiam, recti scilicet, & curvi, de qua suprà *cap.* 3. *n.* 32. *Coroll.* videmus namque peripheriam illam arcùs intercepti semper minorem importare valorem, quò minor fuerit ejus Radius. Unde cùm sophisticè dicitur, angulum contingentiæ minorem esse quocumque rectilineo; id intellige; quia cum illo incomparabilis est, cùm nullum certum obtineat valorem. Idem quoque senties de *convexo* angulo *suprà cap.* 4. §. 2. *n.* 44.

Hæc pro digressione satis.

35 *Ellypsis*, *Parabola*, & *Hyperbola* cùm sint figuræ planæ-rotundæ proprium hic tenerent locum; at quia earum consideratio, clarior habetur ex sectionibus conicis, consultò eas in quartum duximus paragraphum transferendas; cùm scilicet Euclidem, & Apollonium de Cono docentes audierimus. Sit inde igitur.

§. III.

§. III.

De Figuris planis-angularibus.

1 Figura *plana-angularis* est superficies sub pluribus lineis comprehensa, ut dictum est *suprà n.* 15. §. 1. Et quia lineas contingit esse, vel rectas, vel curvas, vel ex utrisque mixtas. Ideò triplex erit figura plana-angularis; nimirum, vel *rectilinea*, vel *curvilinea*, vel *mixtilinea*.

2 *Figura rectilinea est, quæ sub rectis lineis continetur.* Quibus tamen minus, quàm tribus existentibus figura rectilinea dari non potest. Def. 20. 1.

3 Figuram autem *curvilineam* hic voco, non quæ unicâ tantùm curvâ comprehenditur lineâ (hæc enim ad præcedentem spectat paragraphum), benè verò illa quæ sub pluribus curvis comprehenditur lineis. Quæ tamen multiformis evadit pro peritorum ingenioso libito sive regulariter sive irregulariter exercito.

4 Figura *mixtilinea* dicitur, quæ sub Curvis, & rectis lineis comprehenditur. Ut *Semicirculus*, *Quadrans*, *Segmentum*, & cœteræ aliæ; de quibus adhuc procedit divisio in *regulares*, & *irregulares*.

5 Figuræ omnes *rectilineæ* juxta Euclidis doctrinam triplicis sunt generis; nimirum *Trilateræ*, *Quadrilateræ*, & *Multilateræ*.

Def. 21. 1. 6 *Trilateræ quidem, quæ sub tribus* rectis lineis comprehenduntur.

Def. 22. 1. 7 *Quadrilateræ, quæ sub quatuor.*

Def. 23. 1. 8 *Multilateræ verò, quæ sub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.*

9 Primum itaque rectilinearum genus *trilateras* continet figuras, quæ Triangula quoque vocantur. Figura enim plana, tria habens latera, tres quoque angulos obtinebit, ex dictis *suprà* §. 1. *n.* 20.

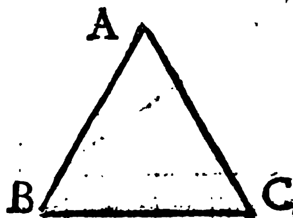
10 *Trilatera* igitur figura, quæ *Triangulum* seu *Trigonus* appellari solet, est figura plana, quæ sub tribus rectis lineis comprehenditur, totidemq; angulos habet.

11 *Triangulum* dupliciter consideratur: vel ratione *laterum*, vel ratione *angulorum*.

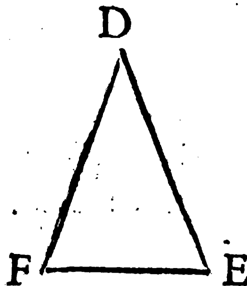
Trian-

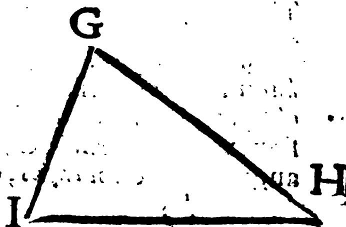
12 *Trianguli* ratione *laterum* tres sunt species: Triangulum scilicet *Isopleurum*, *Isoscele*, & *Scalenum*.

13 Triangulum *isopleurum*, seu latinè *æquilaterum*, sic definit Euclides, *Trilaterarum porrò figurarum, æquilaterum est Triangulum, quod tria latera habet æqualia*; sicut & angulos. Ut Triāgulū ABC, ubi latera AB, BC, CA sunt inter se æqualia, sicut & anguli. Def. 24. I.



14 *Isosceles autem*, seu latinè æquicrurum, *est, quod duo tantùm æqualia habet latera*, quæ crura vocantur, totidemque angulos. Ut Triangulum DEF, ubi duo latera DF, DE sunt æqualia. Def. 25. I.





15 *Scalenum verò est quod tria inæqualia habet latera*. Ut Triangulum GIH, in quo nullum est latus alteri æquale. Def. 26. I.

16 *Trianguli* verò ratione *angulorum* tres quoque sunt species, Triangulum scilicet *orthogonium*, *amblygonium*, & *oxygonium*; hoc est, rectangulum, obtusangulum, & acutangulum. Trian-

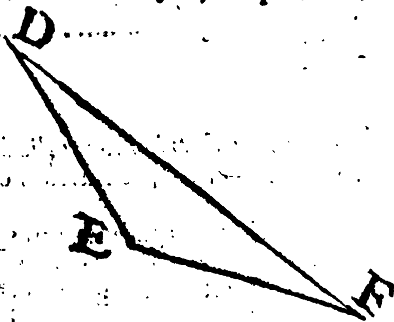
17 Triangulum *orthogonium* seu latinè *rectangulum* sic definit Euclides: *Ad hæc etiam, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem Triangulum est, quod rectum angulum habet*. Hoc est *Orthogonium* Triangulum dicitur seu *rectangulum*, in quo est angulus *rectus*; reliqui verò duo *acuti*. Ut Triangulum ABC in quo angulus B est Rectus; reliqui verò A, & C Acuti.

Def. 27. 1.

18 Ex Trianguli *orthogonii* lateribus majus vocatur *Hypotenusa*, quod scilicet semper angulo recto opponitur, eumque subtendit: reliqua verò dicuntur *Crura* Trianguli; ea scilicet, quæ sunt circa angulum rectum; quorum insuper unum, ut *Basis*, accipitur figuræ, alterum verò, ut *Cathetus*. Ut in eodem exemplo latus AC dicitur Hypotenusa, quia angulo recto B opponitur: reliqua verò dicuntur Crura trianguli; ex quibus insuper si latus BC fiat Basis, erit reliquum AB Cathetus.

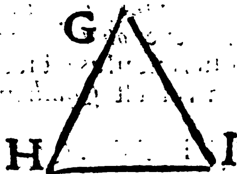
19 *Amblygonium autem, quod obtusum angulum habet*. Hoc est Triangulum *amblygonium*, seu latinè *obtusangulum* dicitur, in quo est angulus *obtusus*; reliqui verò duo *acuti*. Ut Triangulum DEF, in quo angulus E est *obtusus*, reliqui verò D & F *acuti*.

Def. 28. 1.



Oxy-

20 *Oxygonium verò, quod tres habet acutos angulos; ideòq; Triangulum acutangulum latinè appellatur.* Ut Triangulum GHI, in quo omnes anguli sunt *acuti.* Def. 29. I.



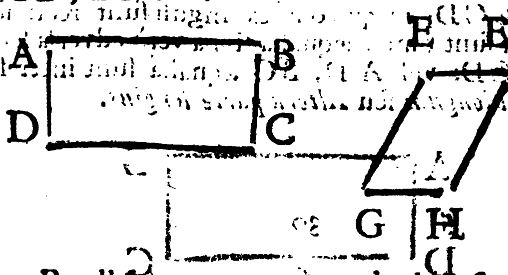
Coroll. Omne igitur Triangulum vel erit *orthogonium isosceles*, vel *orthogonium scalenum*. Item vel *amblygonium isosceles*, vel *amblygonium scalenum*. *Oxygonium* verò potest vel *isopleurum*, vel *isosceles* esse, vel *scalenum.*

21 Secundum genus Rectilinearum continet omnes figuras *quadrilateras*, quæ nimirum quatuor latera, totidemque angulos habent; unde solet hujusmodi figura etiam *Quadrangulum* seu *Tetragonus* appellari.

22 *Quadrilatera* ~~igitur figura,~~ seu *Quadrangulum, & Tetragonus*, est quæ sub quatuor rectis lineis comprehenditur. Def. 22. I.

23 Quadrilaterarum duo sunt genera, videlicet, *Parallelogrammum, & Trapezium.*

24 *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus opposita bina latera sunt parallela.* Ut figuræ ABCD, EFGH.



25 Parallelogrammum autem duplex est; *Rectangulum* scilicet, & *Obliquangulum.*

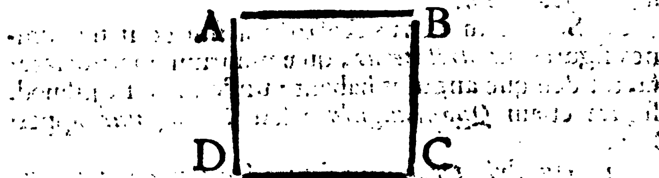
 Re-

26 *Rectangulum Parallelogrammum* (quod & Rectangulum autonomasticè vocari solet) est, cujus omnes anguli sunt *recti*.

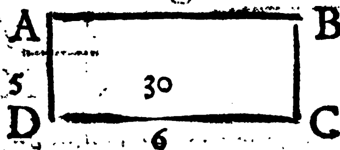
27 *Obliquangulum* verò Parallelogrammum dicitur, cujus omnes anguli sunt *obliqui suprà cap.* 4. §. 2. *n*. 53. seu non recti; *acuti* scilicet & *obtusi*. Ut superior figura E F G H, in qua nullus angulus est rectus.

28 Rectangulum autem vel est *Quadratum* vel *Oblongum*.

Def. 30. 1. 29 *Quadratum* sic definit Euclides. *Quadrilaterarum autem figurarum Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est*. Quadratum scilicet vocatur illud rectangulum Parallelogrammum cujus omnia latera sunt inter se æqualia. Ut Parallelogrammum A B C D, cujus omnia latera inter se sunt æqualia, & anguli recti, vocatur *Quadratum*.



Def. 31. 1. 30 *Oblongum* (quod *Altera parte longius* Euclides vocat) sic ab eo definitur. *Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est*. Oblongũ etenim est illud rectangulum Parallelogrãmum, cujus, non omnia latera, sed tantùm duo quælibet opposita sunt inter se æqualia. Ut Parallelogrammum A B C D; in quo omnes anguli sunt recti, sed latera non sunt omnia æqualia; bina verò adversa latera A B, C D, vel A D, B C æqualia sunt inter se; vocatur *Oblongum* seu *Altera parte longius*.



Om-

31 *Omne Parallelogrãmum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.* Hoc est, sufficienter à nobis determinatur quantitas Rectanguli: cùm ejus duo latera, seu rectas lineas, assignamus, quæ sibi mutùo perpendiculariter insistentes, atque rectum angulum caussantes, totum Parallelogrammum generare censentur eo modo quo retulimus *suprà Cap.* 3. *n.* 6. Per has enim duas rectas lineas satis ejus determinamus longitudinem & latitudinem, in quibus tota ejus quantitas cõsistere dicitur. *Def. 1. 2.*

32 Concipitur autem generari Rectangulum verg: gra: A B C D per fluxum, quem facere intelligatur recta linea A D (putâ quæ latitudinem ostentet) perpendiculariter semper insistens super rectam lineam D C, (quæ longitudinem designet) eam scilicet totam percurrendo ab uno extremo D ad alterum C. Per hunc enim motum seu fluxum unius rectæ perpendiculariter in alteram ductæ ab uno ad alterum extremum, satis convincimur ex dictis *ibidem n.* 8. aliquam terminatam superficiem seu figuram generari planam, & quadrilateram: cujus scilicet duo adversa latera A D, B C, essent ipsa-met data recta A D perpendiculariter ducta super rectam D C, quæ nimirum fluxerit ex D in C: reliquorum verò duorum laterum unum est subjacens recta D C, quæ unà cum priore rectum angulum D comprehendit, alterum esset recta A B, quam illi parallelicè describit extremum A lineæ supercurrentis A D ex A in B modo prædicto. Manifestum est ergo generatam hujusmodi figuram esse totum Parallelogrammum propositum.

33 Qui quidem fluxus seu ductio unius lateris in alterum ad generandum Rectangulum apprimè correspondet ductioni seu Multiplicationi arithmeticæ (de qua supra *cap.* 2. *n.* 19.) ad producendum numerum planum. Nam sicuti ducendo latus A D perpendiculariter in latus D C generatur Rectangulum A B C D: ita multiplicando latus A D 5 per latus D C 6, producitur idem Rectangulum seu planus numerus A B C D 30. Pro quo tamen pauca de communibus rerum mensuris sunt hìc enarranda.

Digreſsio

De Menſuris

34 Communius antiquorum placitum fuit, *latitudinem grani hordeacei* menſurarum omnium eſſe minimam atque principium.

Quæ quater repetita *digitum* conſtituit.

Quatuor digiti faciunt *palmum minorem*, qui & *palmus* abſolutè vocari ſolet.

Ex tribus palmis componitur *Spithama* ſeu *dodrans* qui palmus major etiam appellatur. Eſt enim regularis manûs ſpatium inter pollicem & auricularem extenſos.

Quatuor autem palmi *pedem* conficiunt.

Cubitus *ſeſquipedem* continet, ideſt palmos ſex.

Quatuor pedes habet *Ulna* communis.

Quinque verò pedes *paſſum* conſtituunt *geometricũ*.

Hujus dimidium eſt *paſſus* ſimplex *humanus*.

Duo geometrici paſſus adæquant *perticam* ſeu *decempedam*.

Paſſus geometrici 125 *ſtadium* componunt.

Octo tandem ſtadia, ſeu paſſus mille, *milliare* conficiunt *italicum*, quod maxima fit menſura.

Attamen, quia apud diverſas nationes diverſæ quoq; habentur menſuræ, tum ſub eodem, tum ſub diverſo nomine vocatæ; nec etiam inter Authores convenitur in minimâ ſtabilienda menſurâ; fit, quòd tradita menſurarum progreſſio non videtur ſatis conſtans, nec de maximâ, nec de minimâ. Nam de maximâ, quæ eſt milliare: quis neget, illam paſſim accipi majorem, aut minorem pro diverſo nationum libito ſub eodem milliaris nomine? Nec de minimâ: Sunt enim qui *Lineam* volunt eſſe menſurarum minimam; alii verò, ut diximus, *latitudinem grani hordeacei*. Verumtamen in neutrâ certitudinem inveniemus, niſi ad aliquod indubitatum referamus principium. Nam ſicuti Linea poteſt accipi major aut minor, pro ut libuerit: ita nec minùs incerti ſumus de naturalis grani hordeacei latitudine; cùm in feracioribus agris turgidiora enaſcantur hor-

dei

dei grana, quàm in aridis: quæ quidem differentia, licèt exigua videatur in principio, tamen, cùm compositiores grandescunt mensuræ, in quàm magnum augescat errorem, nemo non videt.

Ad hos igitur scopulos effugiendos autumant recentiores, minimam mensuram potiùs deducendam esse ab aliquo certo ratoque principio, quod invariabiliter idem sit apud omnes. Nullum autem aptius videtur quàm illa terrarum distantia seu longitudo, quæ æqualis est peripheriæ unius gradùs circuli in Terraqueo maximi; quæ nimirum eadem côstanter est apud omnes, & passim in 60 milliaria Italica dividi solet. Talis itaque nobis erit prima & infallibilis mensurarum regula, ad quam cæteras referre debemus, ut eas inde determinare valeamus. Ex hujus enim in partes consuetâ divisione reliquæ, quibus utimur, resultabunt mensuræ, donec ad minimam devenitur, quam *Lineam* vocant, omniumque mensurarum initium esse volunt.

Si terrarum ergo longitudo, quam valori seu arcui unius gradùs in Terraqueo maximi correspondere dicimus, in 60 partes æquales, quæ totidem Italica sunt milliaria, ut volumus, divisa concedatur: & quodlibet milliare in mille subdivisum passus, quos geometricos appellamus, & singuli passus in quinque pedes pariter geometricos; jam gradus in Terraqueo continebit pedes 300000 geometricos. Pes namque est ordinaria atque universalis extensorum mensura. Ut autem hujusmodi pedis longitudo statuatur, atque, pro ut trecentesima-millesima pars est unius gradùs in tellure, apud omnes aliundè innotescat (nimis enim operosum videretur toties eam per divisionem tam magni terrarum tractùs explorare); quidam excogitarunt illam determinandam esse ex certo numero vibrationum, quas intra semihoram emitteret funependulum ritè paratum, cujus scilicet longitudo à puncto suspensionis ad centrum globi æqualis sit assumpto pedi geometrico nimirum illi trecentesimæ-millesimæ parti unius gradùs in Terraqueo; ita ut ea funependuli longitudo dicatur pes esse geometricus, cujus pendulum intra semihoram certum ratumq; numerum vibrationum ab eis præfixum emitteret. Ut est videri in geo-

me-

metriâ practicâ apud recentiores; qui propterea meliori quidem ratione distinctionem mensurarum à maxima scilicet ad minimam procedentium sic disponũt.

35 Terraquei longitudo, quæ valori unius gradûs circuli maximi (ut supra) correspondet, maxima erit omnium mensura, reliquarumque lex & regula; & dividitur in 60 partes æquales, quæ totidem Milliaria Italica nuncupantur.

Milliare in mille passus dividitur geometricos.

Passus autem in quinque subdividitur pedes pariter geometricos.

Pes verò (cujus quantitatem satis ratam habemus ex statuto numero vibrationum funependuli ut suprà) in duodecim dividitur Pollices, quos Itali Uncias vocant.

Pollex tandem seu *Uncia* in duodecim resolvitur *Lineas*.

Linea ergo, mensurarum omnium minima atque initium, erit centesima-quadragesima-quarta pars unius geometrici Pedis, & se habebit ad maximam idest ad valorẽ unius gradûs in Tellure &c: ut 1. ad 43200000

Porro nil vetat quin etiam anteacta vetus mensurarum progressio ut certa constansque apud omnes pariter haberi possit, si nimirum tota earum distinctio ab ejusmodi regulâ principioque derivetur. Nam si initio facto non à naturalis grani hordeacei magnitudine, benè verò à Terraquei gradu (ut dictum est) in 60 milliaria italica diviso, resolvendo in passus palmos ac digitos, deveniamus tãdem ad minimam mensuram, quæ grani hordeacei latitudini est adscripta, proculdubio æquè certa fiet atque constans apud omnes illa mensurarum ratio; Se enim habebit ad maximam ut 1 ad 19200000. Ex quo patet *Lineam* minorem esse *latitudine grani hordeacei*.

36 Denique (ut ad nostrum redeamus propositum) in omni magnitudine determinandâ, istarum aliquâ solemus uti mensurâ, quæ scilicet mensurandis aptior esse videatur. Non enim eodẽ modo istæ accipiẽdæ sunt in mentiendo magnitudinem genera. Nam quando, quod mensuratur, est *linea*, tunc quælibet ex his mensuris *longitudinem* tantùm dicit, putà longitudi-

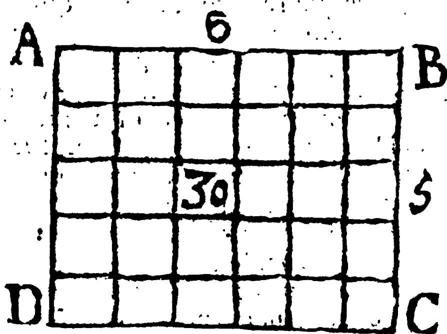
nem

nem unius *digiti*, unius *pedis*, &c. Quando autem, quod mensuratur, est *Superficies*, tunc earum quævis *quadratam* importat figuram, putà *digitum quadratum, palmum quadratum, pedem quadratum*, &c: cujus scilicet latus sit longum unius digiti, unius palmi, unius pedis &c. Quando verò quod mensuratur est *Solidum*, tunc illarum quævis *cubicam* significat figuram, putà *digitum cubicum, palmum cubicum, pedē cubicum* &c: cujus scilicet basis sit quadratus digitus, palmus, pes &c.

Pes itaque longus, palmus longus, digitus longus &c. sunt dumtaxat lineolæ unius pedis, unius palmi, unius digiti &c. quibus scilicet linearum longitudinē mensuramus. Item pes quadratus, palmus quadratus, digitus quadratus &c. sunt parvæ superficies quadratæ, hoc est, Quadrata quorum latera singulorum longa sunt unius pedis vel unius palmi, vel unius digiti &c: quibus nimirum Areas planarum figurarum mensuramus. Et tandem pes cubicus, palmus cubicus, digitus cubicus, sunt Solida cubica, hoc est, Cubi, quorum bases singulornm sunt Quadrata unius pedis, unius palmi, unius digiti &c: quibus utique solidarū Areas figurarum metimur.

Finis digressionis.

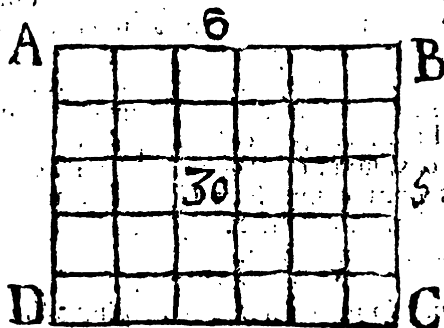
37 Quando igitur animo concipimus lineam AD quinque palmorum perpendiculariter duci in lineam



DC sex palmorum, satis convincimur, eam aliquid post se relinquere, quod nonnisi Superficies erit pla-

na

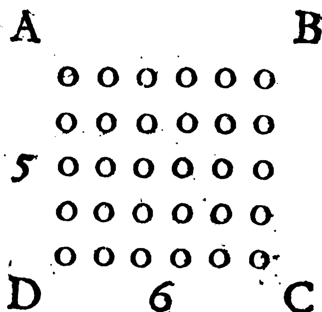
na inter lineas A D, D C, A B, B C comprehensa, Parallelogrammum ſcilicet A B C D, cujus Area tot palmos capiet quadratos, ſeu tot Quadratula continebit unius palmi, quot fuerint linearum diviſiones inter ſe multiplicatæ, nempe 30: quinquies enim ſex facit 30. Ut apparet in Rectangulo ABCD. Nam recta linea A D quinque palmorum fluens perpendiculariter ſuper rectam lineam D C ex D in C, cùm ad ſingulas hujus diviſiones pertigerit, totidem Rectangula generabit partialia, ſingula ex quinque Quadratulis ſeu quadratis pedibus con-



ſtantia juxta quinariam ſui diviſionem: at quia ſex ſunt ſubjectæ D C diviſiones; ideò ſex ibi repetenda cenſentur Rectangula partialia, quæ quidem cùm ex cõtinuo ſint generata motu, continuari ſibi invicem, proindeque totum componere videntur Parallelogrammum A B C D rectangulum. Cum igitur ſexties quinque, ſive quinquies ſex, producant 30, manifeſtum eſt Aream Parallelogrammi A B C D continere 30 palmos quadratos, ſeu 30 parvula Quadrata, ſingula latus unius palmi longum habentia.

Quod quidem quantum affinitatis habeat cum numericâ multiplicatione, nemo non videt. Cùm prorſus idem ſit, ducere lineam A D quinque palmorũ perpendiculariter in lineam D C ſex palmorum; quam multiplicare latus A D 5 unitatum per latus D C 6 uni-

unitatum. Nam sicut ex multiplicatione A D 5 in D C 6 producitur planus numerus 30, cujus unitates disponi quidem possunt in Rectanguli formâ A B C D, ut vides zeris confectum exemplum; quique propterea dicitur contineri sub duobus numeris 5, &

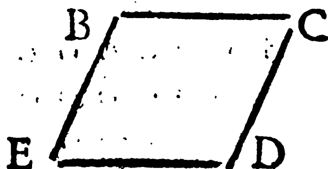


6, quòd hi in se ducti totum præcisè adæquant 30. Ita quoque si linea A D quinque palmorum perpendiculariter ducatur in lineam D C sex palmorum, jam triginta produci videntur quadratula unius palmi, quæ totum constituunt Rectangulum A B C D, quod ideò dicitur *contineri sub duabus rectis* A D, D C, angulum rectum A D C comprehendentibus, quia ab eis concipitur generari, ut dictum est. Sicque utroque modo videtur æqualiter produci Rectãgulum ABCD, vel 30 palmorum quadratorum, vel 30 unitatum.

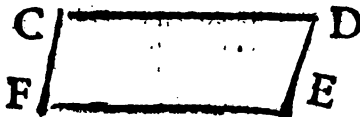
38 Haud igitur absre solent hìc mathematici Rectangulum duabus tantùm cyphris sive literis exprimere, quæ nimirum extrema fuerint duarum rectarũ, quibus ipsum dicitur contineri. Ut idem Rectangulũ A B C D sufficienter exprimimus duabus literis A C, utpotè quæ in exẽplo satis designant latera A D, D C, rectas scilicet lineas, quibus cõtineri dicitur Rectangulum A B C D. Et similiter hoc usurpare quoque consueverunt in exprimendis Parallelogrammis etiam nõ rectangulis; ea scilicet exprimendo duabus tantùm cyphris diagonaliter oppositis.

39 *Obliquangula* verò *Parallelogramma* duo sunt, *Rhombus* scilicet, & *Rhomboides*.

Def. 32. 1. 40 *Rhombus est figura quæ æquilatera, sed rectangula non est.* Rhombus namque est illud obliquangulum Parallelogrammum, cujus omnia latera sunt inter se æqualia, sed ex obliquis angulis bini tantùm oppositi sunt æquales. Ut Obliquangulum Parallelogrammum BCDE, in quo omnia latera sunt invicem æqualia, & ex obliquis angulis solùm oppositi B & D, vel oppositi C & E sunt æquales, vocatur *Rhombus*.



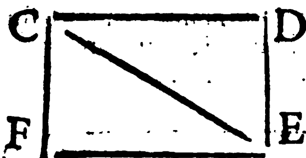
Def. 33. 1. 41 *Rhomboides verò, quæ adversa & latera & angulos habens inter se æqualia, neque æquilatera est, neque rectangula.* Hoc est Rhomboides vocatur illud obliquangulum Parallelogrammum, cujus tantùm opposita bina latera, & bini anguli, sunt inter se æqualia. Ut Obliquangulum Parallelogrammum CDEF, nec æqualia latera, nec rectos angulos habens; in quo tamen opposita bina latera CF, DE, vel CD, FE sunt inter se æqualia: sicut & bini anguli tantùm oppositi C & E, vel D & F sunt inter se æquales; vocatur *Rhomboides*.



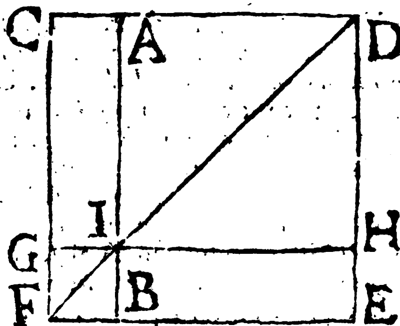
42 *Diameter* seu Diagonus *cujusque Parallelogrãmi est linea recta adversos angulos conjungens.* Ut in Parallelogrammo CE recta linea FD, quæ oppositos conjungit angulos F & D, *Diagonus vocatur.*

Coroll.

Corall. Hinc evidens fit, omne Parallelogrammum à suo Diagono in duo semper dividi Triangula simpliciter æqualia. Quadratum scilicet in duo Triangula orthogonia isoscelia, Oblongum verò in duo Orthogonia scalena. Rhombus autem, si scissio fiat penes angulos acutos, in duo secatur Triangula amblygonia isoscelia; si verò fiat penès obtusos, in duo finditur oxygonia, sive isoscelia, sive isopleura. Et tandem Rhomboides in duo semper dividitur Triangula scalena; oxygonia quidem, si scissio per Diagonum fiat penès angulos obtusos; amblygonia verò si fiat penès angulos acutos.

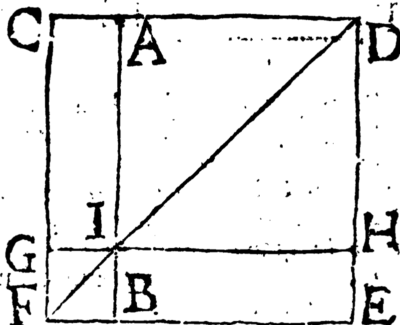


43 *Circa Diametrum* alicujus Parallelogrammi dicuntur esse Parallelogramma: quando intra illud existentia eundem cum toto obtinent Diagonum. Ut intra Parallelogrammum C E, *circa Diametrum* seu Diagonum F D dicentur esse duo Parallelogramma A H, G B; si recta F D quæ Diagonus est totius Parallelogrammi C E, fuerit etiam Diagonus ad utrumque Parallelogrammum A H, G B.



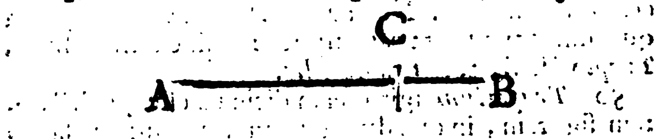
44 *Complementa autem sunt duo Parallelogramma, intra aliud majus existentia, per quæ Diameter* seu Diagonus *non transit*. Ut in eodem Parallelogrammo C E, duo illa Parallelogramma C I, E I extra communem totius figuræ Diagonum F D constituta; per quæ scilicet non transit Diagonus F D; vocantur *Complementa*.

Def. 2. 2. 45 *In omni Parallelogrammo unum quodlibet eorū quæ circa Diametrum illius sunt, Parallelogrammorū cum duobus Complementis, Gnomon vocetur*. Ut in eodem Parallelogrammo C E, si ex duobus, quæ *circa Diagonum* sunt, Parallelogrammis AH, GB, sumatur utrumlibet, unà cum duobus Complementis C I, E I: hæc tria Parallelogramma simul sumpta vocantur *Gnomon*. maximè quia figuram Gnomonis, vulgò *Squadra*, præseferre videntur.



Def. 3. 6. 46 *Secundùm extremam, & mediam Rationem recta linea secta esse dicitur, cùm ut tota ad majus segmentum, ita majus ad minus se habuerit*. Ut si recta linea A B ita secetur inæqualiter in C, ut tota A B habeat eamdem Rationem ad majorem partem A C, quam major pars A C habuerit ad minorem C B: seu quod idem est: sicut se habuerit tota A B ad majus segmentum A C, ita majus segmentum A C ad minus segmentum C B: dico lineam A B *sectam esse secundum extremam, & mediam Rationem*. quæ tamen in numeris numquam reperiri potest. Hujus autem ad-

admirandæ sectionis, quam ob insignes utilitates, & proprietates divinam prædicant Mathematici, hoc in loco ponimus definitionem, propterea quòd ejus Pro-



blematis constructio sicut & demonstratio à Parallelogrammis tota pendere videtur: ut Eucl: docet *in prop. 30. libri 6. Elementorum.*

47 *Lineæ rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quarum Quadrata una eadem Superficies sive Area metitur.* Def. 3. 10.

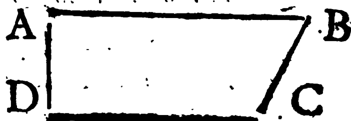
48 *Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum Quadrata, quæ metiatur Area communis, reperiri nulla potest.* Def. 4. 10.

Hoc est, rectæ lineæ possunt esse vel *longitudine commensurabiles*, vel *potentiâ tantùm commensurabiles*, vel *omninò incommensurabiles*. Rectæ *longitudine commensurabiles* sunt, quarum longitudines sunt inter se commensurabiles *suprà cap. 2. §. 2. n. 3.* utpotè quæ invicèm comparantur ut numerus ad numerum: tuncque lineæ sunt omninò commensurabiles, tàm scilicet secundùm longitudines velut numerus ad numerum, quàm secundùm Quadrata super eis constructa velut numerus quadratus ad numerum quadratum. Rectæ verò *potentiâ tantùm commensurabiles* sunt, quarum longitudines sunt inter se incommensurabiles, *ibidem n. 4.* utpotè quæ per numeros nequeunt comparari: Quadrata tamen super eisdem constructa sunt inter se commensurabilia, velut numerus ad numerum, sed non ut numerus quadratus ad numerum quadratum, inquantùm scilicet in rerum naturâ datur aliqua superficialis Area, quæ sit eorum communis mensura. Rectæ tandem omninò incommensurabiles sunt, quarum nec longitudines, neque Quadrata super eis constructa sunt inter se commensurabilia: cùm scilicet nulla reperiri possit superficialis Area, quæ sit communis eorum mensura, nec proinde ulla lineola, quæ illarum longitudines commensuret.

Præ-

Def. 34. l. 1. 49. *Præter hæc autem reliqua quadrilatera figuræ Trapezia appellantur.* Sub Trapezii vocabulo comprehendit hic Euclides omnes quadrilateras figuras à cœteris distinctas. Nos autem claritatis gratiâ juxtà quorumdam placita eas duplici nomine distinguimus *Trapezii* scilicet, & *Trapezoidis*.

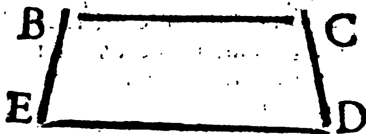
50 *Trapezium* igitur eam dicimus esse quadrilateram figuram, in qua duo tantùm inveniuntur latera parallela, non verò reliqua. Ut Trapezium ABCD, in quo duo tantùm latera opposita AB, DC sunt parallela; reliqua verò AD BC non sunt parallela.



51 *Trapezium* autem, tum ratione angulorum, tum ratione laterum, duplex ponimus; *rectangulum* scilicet, & *obliquangulum*: item *isosceles*, & *scalenum*.

52 *Rectangulum Trapezium* dicimus, quod duos habet rectos angulos laterales. Ut superius Trapezium ABCD, in quo duo sunt recti anguli A, & D, laterales.

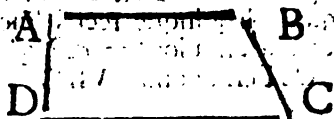
53 *Obliquangulum* verò *Trapezium* vocamus illud, in quo nullus est angulus rectus. Ut Trapezium BCDE.



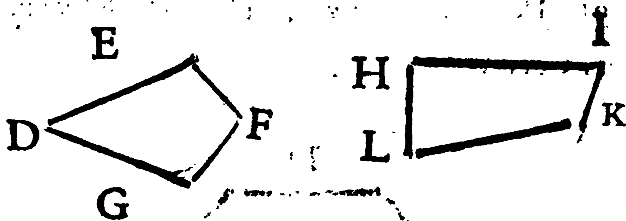
54 *Isosceles Trapezium* dicitur, quod habet duo opposita latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia. Ut est idem Trapezium BCDE, in quo latera non parallela BE, CD sunt inter se æqualia.

Sca-

55 *Scalenum* verò *Trapezium* dicitur illud, in quo licet inveniantur duo tantùm opposita latera parallela, non tamen duo opposita æqualia. Ut Trapezium ABCD.



56 *Trapezoides* vocari potest illa ex quadrilateris figura, in qua non inveniuntur latera parallela. Quæ tamen si duo quælibet conjuncta latera habuerit æqualia, dicetur *isosceles*; ut Trapezoides DEFG; si verò nullum æquale, dicetur *Scalena*; ut Trapezoides HIKL. Rursus si rectum aliquem habuerit angulum, dicetur *rectangula*; ut Trapezoides DEFG: si verò omnes habuerit obliquos, dicetur *obliquangula*; ut Trapezoides HIKL.



Coroll. I. Omne igitur *Trapezium* vel erit *rectangulum scalenum*, vel *obliquangulum isosceles*, vel *obliquangulum scalenum*.

Coroll. II. *Trapezoides* verò vel erit *rectangula isosceles*, vel *rectangula scalena*, Item vel *obliquangula isosceles*, vel *obliquangula scalena*.

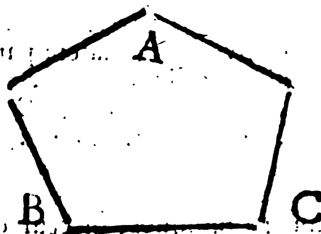
57 Tertium genus rectilinearum continet omnes figuras *multilateras*.

58 *Multilatera figura est, quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenditur*, pluresque subinde angulos habet: unde & *Polygonus* græcè nuncupatur, idest multos habens angulos. Def. 23. 1.

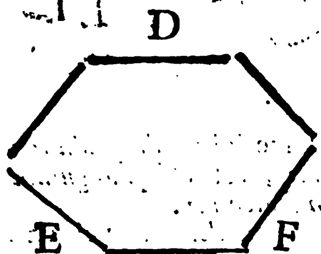
Po-

59 Polygonorum tot ſunt ſpecies, quò plures quàm quatuor angulos lateraque figura rectilinea obtinuerit, putà quinque, ſex, ſeptem, &c. Unde Polygoni ſunt *Pentagonus*, *Hexagonus*, *Heptagonus*, *&c.*

60 Horum igitur primus eſt *Pentagonus*: plana ſcilicet figura, quæ ſub quinque rectis lineis comprehenditur, totidemque angulos habet, à quibus ſcilicet nomen accipit. Ut Pentagonus A B C



61 Deinde *Hexagonus*, qui nimirum ſub ſex lineis rectis comprehenditur, ſexque propterea angulos habet. Ut Hexagonus D E F

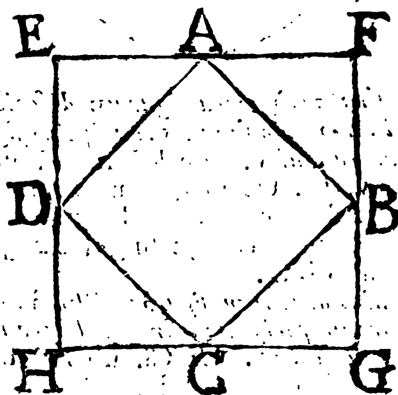


62 Et ita conſequenter dicetur de cæteris Polygonis; putà de *Heptagono* qui ſub ſeptem; de *Octagono*, qui ſub octo; de *Ennecagono* qui ſub novem; de *Decagono*, qui ſub decem, rectis lineis comprehenduntur, totidemque angulos habent, à quibus denominationem

nem accipiunt: nam *Penta* græco vocabulo significat quinque & *gonos* angulum, ideſt Quinquangulum. Et ſic de reliquis.

63 Ex quibus tamen, quæ ſunt æquilateræ, dici ſolent *regulares* (ſuprà §. 1. n. 71.) quæ verò non ſunt æquilateræ, paſſim *irregulares* judicantur.

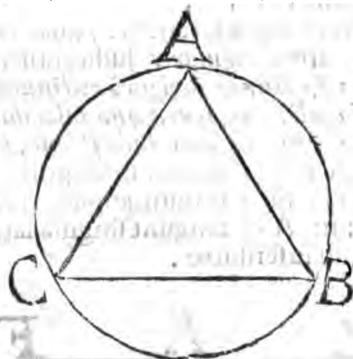
64 *Figura Rectilinea in figurâ rectilineâ inſcribi dicitur, cùm ſinguli, ejus figuræ quæ inſcribitur, anguli, ſingula latera ejus, in qua inſcribitur, tangunt.* Ut Quadratum A B C D dicitur inſcriptum in alio Quadrato E F G H, quia ſinguli anguli A, B, C, D inſcripti Quadrati A C tangunt ſingula latera Quadrati E G, in quo inſcribitur. *Def. 1. 4.*



65 *Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur, cùm ſingula, ejus quæ circumſcribitur, latera ſingulos ejus angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.* Hæc definitio eſt utique ſuperioris converſa. Ut in eodem exemplo Quadratum E F G H dicitur deſcriptum circa Quadratum A B C D, quia ſingula latera E F, F G, G H, H E Quadrati E G circum deſcripti tangunt ſingulos angulos inſcripti Quadrati A C. *Def. 2. 4.*

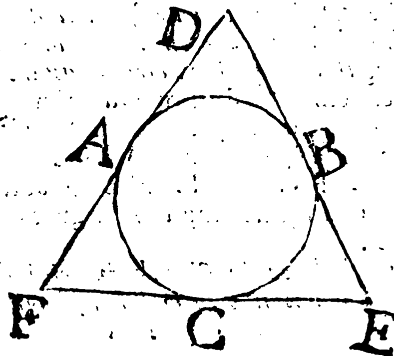
66 *Figura rectilinea in Circulo inſcribi dicitur, cùm ſinguli, ejus figuræ quæ inſcribitur, anguli tetige-* *Def. 3. 4.*

nius Circuli peripheriam. Ut Triangulum A B C dicitur inscriptum in Circulo A B C, quia singuli ejus anguli A, B, C tangunt Circuli peripheriam.



67 *Circulus verò circa figuram describi dicitur, cùm Circuli peripheria singulos tangit ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.* Hæc definitio est quoque præcedentis conversa. Ut in eodem exemplo Circulus C A B dicitur descriptus circa Triangulum A B C, quia Circuli peripheria tangit singulos angulos inscripti Trianguli A B C. Def. 6. 4.

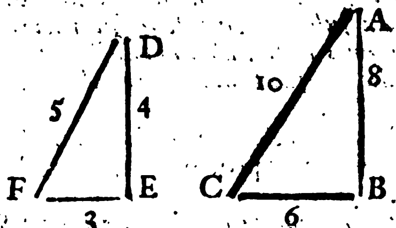
68 *Circulus autem in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, cùm Circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ cui inscribitur.* Ut Circulus A B C dicitur inscriptus in Triangulo D E F, quia Circuli peripheria tangit singula latera Trianguli D E F, in quo inscribitur. Def. 5. 4.



Fi-

69 *Figura verò rectilinea circa Circulum describi dicitur, cùm singula latera ejus, quæ circumscribitur, Circuli peripheriam tangunt*. Hæc definitio similiter est præcedentis conversa. Ut in eodem exemplo Triangulum DEF dicitur descriptum circa Circulum ABC, quia singula Trianguli latera tangunt peripheriam inscripti Circuli ABC. Def. 4. 4.

70 *Similes figuras*, definivimus cum Euclide *suprà §. 1. n. 66.*, eas esse, *quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales, proportionalia*. Ut duo Triangula ABC, DEF, similia erunt, si angulus A æqualis fuerit angulo D, angulus B angulo E, & angulus C angulo F: atque etiam latera habuerint proportionalia: idest, quòd eadem sit Ratio lateris AB, ad latus BC; quæ est lateris DE ad latus EF: & ut BC, ad CA; ita EF, ad FD. Nam si in Triangulo ABC, latus AB sit 8, BC 6, & CA 10: in altero verò Triangulo DEF, latus DE sit 4, EF 3, & FD 5: jam eadem erit Ratio 8 ad 6, quæ sit 4 ad 3; & Ratio 6 ad 10 eadem, quæ 3 ad 5. Quod est esse quantitates proportionales. Ut prolixiùs docuimus *suprà in §. 2. cap. 1.* Def. 1. 6.



71 De figuris autem *Curvilineis*, quæ scilicet sub pluribus curvis lineis comprehenduntur, nullus hìc est specialis sermo, cùm minimus sit apud Mathematicos earum usus, imò nullus, quia, nisi ad regulares sive rectilineas, sive rotundas revocentur, juxta diversa peritorum placita habent sine lege vagari.

72 De *Mixtilineis* verò saltem regularibus satis egisse videmur, cùm superiùs eas in Circulo, velut ejus partes, consideravimus: Ut est *Semicirculus, Qua-*

drans, *Sextans*, *Arcus*, *Sector*, *Gradus*, *Segmentum*, &c. Sicut & nonnullas alias in sectionibus conicis infrà subjungemus: quas omnes, & figuras esse mixtilineas satis constat, ex eo quod sub rectis simul & curvis comprehenduntur lineis, & præ cœteris seligendas duximus, utpotè quarum mentio frequentiorem habet usum in Mathesi; reliquas enim velut irregulares meritò rejicimus.

§. IV.

De Figuris Solidis-rotundis.

1 Figura Solida-rotunda (ut diximus *suprà* §. 1. *num.* 16.) est solidum sub unâ curvâ superficie comprehensum.

2 Inter figuras quascumque supremum locum obtinet *Sphœra*, quam Euclides sic describit: *Sphœra est figura, quæ conversô circum quiescentem Diametrum semicirculô continetur, cum in eumdem rursus locum restitutus fuerit, unde moveri cœperat.* Hoc est *Sphœram* generari concipimus ex integrâ gyratione Semicirculi circum immotã Diametrum conversi. A Theodosio verò lib. 1. Sphœricorum sic definitur: *Sphœra est figura solida sub unicâ quidem superficie comprehensa, ad quam omnes rectæ, ab uno punctô intra figuram posito, lineæ ductæ, sunt inter se æquales.* Velut pila lignea, saxea, &c.

3 Globus idem est quod Sphœra: unde omnia, quæ de Sphœrâ dicemus pro Globo quoque dicta intelligi volumus.

4 *Centrum Sphœræ est idem, quod & Semicirculi:* punctum scilicet medium quiescentis Diametri. Vel secundùm Theodosium: *est punctum illud intra Sphœrã positum, à quo omnes rectæ ad circumferentiam eductæ sunt inter se æquales.*

5 *Axis autem Sphœræ est quiescens illa linea, circum quam Semicirculus convertitur.* Quando enim in generatione Sphœræ Semicirculum, admonemur, in gyrum converti, eum concipimus revolvi circa rectam lineam, quæ Diameter est Semicirculi circumducti, quam,

quam, docet Euclides, Axim esse Sphœræ. Vel aliter ex Theodosio: *Axis sphœræ est linea recta per centrum sphœræ transiens, ad ejusque superficiem utrinque terminata, & circa quam quiescentem Sphœra intelligitur circumvolvi.*

6 *Diameter verò Sphœræ*, ab Euclide definitur, *est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphœræ superficie terminata.* Quibus verbis facilè deducimus, Diametrum prorsus ab Axi non differre, si circum eam quiescentem Sphœra revolvi intelligatur. Omnis enim Axis est Sphœræ Diameter: sicut & omnis Diameter, circum quam Sphœra revolvi intelligitur, est Axis.

At quia Diameter duplex habet munus in figurâ, unum quidem principale secundùm nominis Æthymologiam, quod est *figuram per medium metiri*; alterum verò secundarium, & quasi ex consequente, quod est *eam bifariam secare.* Ideò si Diameter hic accipiatur pro *principali* ejus munere, quod est Sphœram per medium metiri: sic jurè videtur ab Euclide definiri: *Diameter est linea recta &c.* Omnis enim recta linea centrum Sphœræ pertransiens atque ad illius superficiem hinc-inde terminata, totam profectò videtur Sphœræ sive longitudinem, sive latitudinem, sive crassitudinem adæquare. Unde fit quòd si tres hujusmodi Diametri in Sphœræ centro orthogonaliter se mutuò secuerint, sanè totam Sphœræ magnitudinem exactè metientur trium scilicet ejus æqualem dimensionem.

Si verò Diameter sumatur pro ejus *secundario*, quod est figuram secare. Sic Diameter nequit esse linea, bene verò Circulus: cùm sola superficies Solidum valeat terminare, *suprà cap.3.n.12*, ac proinde illud secare, non verò linea.

7 Omnis igitur plana superficies, Sphœram secans, Circulus est, cujus planum totum intra Sphœræ crassitudinem cadit, atque ejus peripheria tota in Sphœræ superficie existit; qui propterea *Circulus in Sphœrâ descriptus* appellari solet.

8 *Sector Sphœræ* est omnis Circulus *in Sphœrâ descriptus*, qui videlicet eam bifariam secat, sive æqualiter, sive inæqualiter.

Cir-

9 Circulus *in Sphærâ maximus* dicitur ille *in Sphærâ descriptus*, cujus centrum est idem cum centro Sphœræ. Vel est ille Sector, qui, centrum Sphœræ persecans, eam dividit in duo æqualia, quæ Hemisphœria vocantur. Eaque propter absque dubio rationem induet Diametri: cùm pariter omnes ejus Diametri sint quoque Sphœræ Diametri. Unde & maximus Sector, & Diameter Sphœræ à nonnullis nuncupari solet; adeòque omnes Circuli in Sphœrâ maximi sunt inter se æquales, æqualiterque se mutuò bifariam secant, quemadmodum in Circulo omnes ejus Diametri.

10 Circulus *in Sphœrâ minor* dicitur ille *in Sphœrâ descriptus*, cujus centrum seorsim cadit extra Sphœræ centrum. Vel est ille Sector, qui Sphœram dividit in duo inæqualia, quæ Segmenta nuncupantur; majus scilicet, in quo Sphœræ centrum continetur; minus verò, in quo non reperitur Sphœræ centrū. Solet autem absolutè *Sector* appellari.

Unde res haud dissimiliter quàm in Circulo se habere videtur in Sphœrâ. Nam sicut in Circulo, Diameter est maxima recta in eo contenta, quæ per ejus centrum transiens illum æqualiter dividit in duos semicirculos: Chorda verò est minor recta, quæ extra Circuli centrum ducta, illum dividit in duo inæqualia Segmenta; majus scilicet, in quo reperitur Circuli centrum; minus verò, in quo non reperitur. Ita pariter in Sphœrâ, Diameter dici potest maximus Circulus in Sphœrâ descriptus, qui scilicet per Sphœræ centrum transiens, ipsam æqualiter dividit in duo Hemisphœria seu dimidia: Sector verò dicitur Circulus in Sphœrâ minor, qui extra Sphœræ centrum ipsam dividit in duo inæqualia Segmenta; majus scilicet, in quo continetur Sphœræ centrum; minus verò, in quo non continetur. Et tandem sicuti Diameter & Chorda in Circulo totæ intra Circulum cadunt, & utrinque ad eius peripheriam terminos applicant. Ita Sectores maximus, & minor in Sphœrâ toti intra Sphœram cadunt, & suas habent peripherias totas in Sphœræ superficie existentes.

11 *Polus Circuli in Sphœrâ descripti est punctum in Sphœ-*

Sphæræ superficie positum, à quo lineæ omnes ad prædicti Circuli circumferentiam ductæ, sunt æquales. Hoc est extremum ejus Axis, qui in Sphœræ superficie est terminatus. Theod. def. 5. 1.

12 *Circuli in Sphœrâ paralleli* dicuntur qui eundem habent Axem.

13 *Circuli in Sphœrâ æqualiter distant à centro: cùm lineæ perpendiculares ab eo ad eorum plana ductæ, sunt æquales.* quemadmodum in Circulo definivimus cum Euclide *suprà §.2.n.26.* Ejusd. def. 6. 1.

14 *Communis circulorum Sectio* in Sphœrâ, linea est recta, quæ, in utroque plano existens, atque in Sphœræ superficie hinc-inde terminata, utriusque Circuli peripheriam subtendit.

15 *Anguli Sphœrales* sunt, qui ex mutuâ duorum Circulorum in Sphœrâ descriptorum intersectione causantur. Solent autem ab Astronomis anguli in Sphœrâ superficialiter considerari, quatenus scilicet ex Circulorum solis peripheriis in Sphœræ superficie se mutuò secantibus consurgant. Quorum etiam indè procedit divisio in Rectos, Obtusos, & Acutos, quemadmodum in planis angulis satis est dictum.

16 Duo Circuli *orthogonaliter sese intersecant*, seu ut dicitur, *ad angulos rectos*: quando unius planum ad alterius planum *rectum* est *suprà cap.4.§.2.n.22.* tuncque se mutuò bifariam secant æqualiter; atque Axis unius evadit Diameter alterius; nimirum polis unius locantur in peripheriâ alterius.

17 *Semidiameter* Sphœræ est recta quæcumque à centro in circumferentiam projecta.

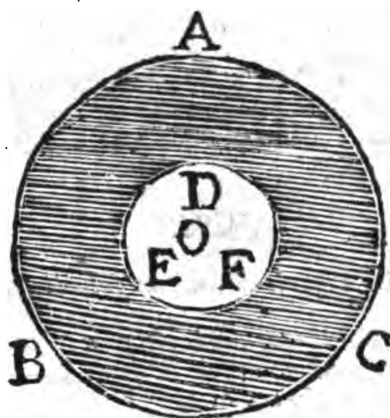
18 Inter universas igitur figuras, velut omnium nobilissima, laudatur Sphœra, utpotè quæ maximam præ cœteris obtinet *simplicitatem, similitudinem, commoditatem, & pulchritudinem.* Est enim Sphœra omnium *simplicissima*, quia una inclusa termino nihil retinet asperitatis, nullam eminentiam, nullos angulos aut anfractus admittit, unde partium æqualitate, similitudine, & loci identitate reliquas omnes longè antecellit. Maximam quoque retinet *similitudinem* cum ingente totius Universi machinâ: quod enim DEUS Optimus Maximus sensibilem Mundum Sphœricâ de-

coraverit figurâ, satis experiuntur omnes. Imò quamdam adhuc sapit similitudinem cum ipso Mundo Archetypo, qui est DEUS Altissimus, ut assimilat *Magister Io: de Sacro Bosco* (quem aliqui Prædicatorum Ordini addicunt) in suâ Sphœrâ Mundi *cap. 1.* Nam sicuti Mundus ille Archetypus nec principium habet, neque finem, cùm sit infinitus per essentiam; ita quodammodo in Sphœrâ non est principium assignare, neque finem: unde per eam ineffabilis Æternitatis nobis traditur mirabile symbolum. Præterea *Commodissima* est omnium Sphœra, tum quia cunctas in se figuras continens, isoperimetrorum corporum est maximum, proindeque figurarum omnium capacissima: tum etiam quia motui fit omnium aptissima; cùm tota in eodem prorsus loco manens mirâ facilitate circa proprium Axem revolvi queat. Et tandem formarum omnium Sphœra *pulcherrima* est, ut hominum visui satis patet.

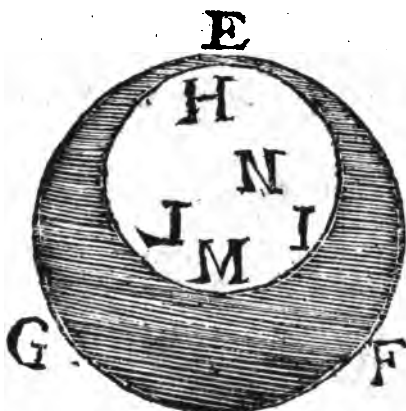
19 *Orbis* plerumque pro Sphœrâ accipitur & è converso. Unde frequenter Terraqueum, quia sensibiliter Sphœricum est, *Orbis terrarum* in sacris literis absolutè nuncupatur. Veteres tamen Orbem ponebant pro Circulo: Unde Cic. de Nat. Deorum sic fatur: *Duæ formæ præstantes sunt, ex solidis Globus, ex planis Circulus vel Orbis, qui græcè cyclos appellatur.* At verò propriè, velut ab Astronomis, Orbis sumitur pro figurâ solidâ sub duabus sphœricis superficiebus comprehensa, quarum una concava, altera convexa: cujusmodi sunt Cœli, vel intelliguntur esse Planetarum Orbes in æthereâ regione locati, quorum singuli videlicet duas habent superficies, crassitudinem aliquam concludentes, convexam scilicet quâ Orbis circumtegitur ex parte foris, & concavam quâ conterminatur ex parte intùs. *Hoc namque differt Orbis à Sphœrâ*, ait P. Clavius in comment. cap. 1. Sphœ. Sacro Bosco. *quòd hæc ad centrum usque tota sit solida, unicâque tantùm superficie putà convexâ exteriore concludatur; orbis autem non ita, sed duabus finiatur superficiebus: unâ exteriore, & alterâ interiore, quales sunt omnes Cœli.*

20 Quòd si istæ duæ Superficies seu Circumferentiæ unum, ac idem habuerint suæ Sphœricitatis centrum,

trī., Orbis vocabitur *concentricus*. Ut Orbis A B C, cujus utraque ſuperficies, concava ſcilicet D E F, & convexa A B C, unum ac idem habent centrum O, dicitur *concentricus*.



21 Si verò in Orbe una circumferentia centrum habeat ſuæ Sphœricitatis diverſum ab alterius centro,



ſeu extra illud, Orbis dicetur *excentricus*. Ut Orbis EGF,

Ec

EGF, cujus convexa superficies EGF habet centrum M; concava verò HIL habet centrum N, videlicet hoc extra illud positum, dicitur *excentricus*. Hinc patet, Orbem *concentricum* undequaque paris esse crassitudinis Orbem; *Excentricum* verò imparis esse crassitudinis: ut manifestum apparet in allatis Orbium exemplis.

22 *Ovale* seu *Sphærois* idem est, ac corpus *ellypticum*, seu rotundum solidum altera parte longius. Unde pauca quæ de eo dici possunt post Ellypsin subjungemus.

§. V.

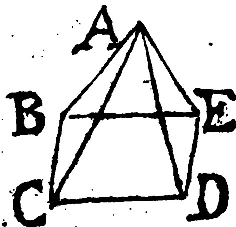
De Figuris Solidis-angularibus.

1 Figura *Solida-angularis* est, quæ sub pluribus superficiebus comprehenditur. Unde si superficies erint planæ, figura dicetur *Planilatera*, si curvæ, *Curvilatera*, & si ex utrisque mixta, *Mixtilatera*.

2 Figura *plani-latera* dicitur, quæ sub planis superficiebus comprehenditur: & triplex est, nimirum *Pyramis*, *Prisma*, & *Trapezium solidum*.

3 *Pyramis* est prima figura, quæ in Solidis angularibus ex pluritate Planorum, Solidum comprehendentium, consurgere potest, quemadmodum in planis figuris rectilineis primum resultat Triangulum. Definitur igitur ab Euclide: *Pyramis est figura solida, quæ*

Def. 12. 11.



planis continetur, ab uno plano ad unum punctum collecta, & constituta. Hoc est, quæ Planis comprehenditur,

tur, quorum uni reliqua insistentia Triangula sunt, basin habentia in uno eodemque Plano, apicem verò in uno puncto communem. Ut figura solida ABCDE, quæ à planâ basi BCDE, & erectis super eam planis Triangulis ABC, ACD, ADE, AEB in unū communem apicem A confluentibus continetur, *Pyramis* nuncupatur.

4 Basis Pyramidis est Planum illud, super quod reliqua, seu plana Triangula (quæ figuræ latera appellantur), Pyramidem continentia consistunt. Ut Basis BCDE, super quam reliqua latera seu plana Triangula ABC, ACD, ADE, AEB consistunt. Quòd si hujusmodi Triangula seu latera super basim institerint ad angulos invicem æquales, Pyramis erit regularis; si verò constiterint ad angulos inter se inæquales, Pyramis dicetur irregularis.

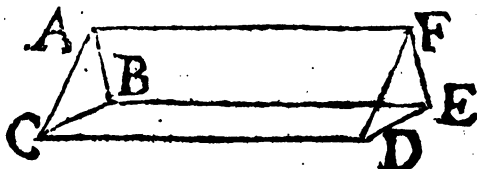
5 Apex seu Vertex Pyramidis est unum punctum, in quod ejus latera seu Triangula confluunt, & colliguntur. Ut punctum A.

6 A Basi Pyramis tota denominationem sumit. Ut videlicet dicatur Pyramis *trigona*, si ejus basis fuerit Triangulum. Pyramis *tetragona*, si ejus basis fuerit Quadrangulum. Pyramis *pentagona* sic fuerit Pentagonus. *Hexagona*, si Hexagonus &c. Hinc Pyramis tot Triangula latera habebit, quot fuerint basis latera. Pyramis enim *trigona* tria triangula latera præter basin habet, quia basis est Triangulum. Pyramis *tetragona* quatuor Triangula requirit, quia ejus basis est Quadrangulum. & ita consequenter Pyramis *pentagona* quinque Triangula. Pyramis *hexagona* sex Triangula &c. Ut in allato exemplo Pyramis ABD dicitur *tetragona*, quia ejus basis BD est Quadrangulum, quatuorque propterea Triangula suscipit.

7 Frustum Pyramidis seu curta Pyramis est: quando, fracto rejectoque ejus apice, consideratur Pyramidis residuum ad basin usque.

8 *Prisma est figura solida, quæ Planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, &* *Def.* 13. 11. *parallela; alia verò parallelogramma.* Ut Prisma AE, quod sub quinque Planis comprehenditur, quorum

duo opposita A C B, D E F sunt duo Triangula similia, æqualia, & parallela, reliqua verò AD, DB, BF sunt tria Parallelogramma nempe Oblonga.



9 Bases Prismatis sunt duo illa Plana æqualia, similia, & parallela; reliqua verò Plana dicuntur latera Prismatis. Ut in eodem Prismate AE, Triangula A B C, F E D sunt ejus Bases; reliqua verò tria parallelogramma dicuntur latera.

10 A basium autem figurâ, Prisma denominatur vel *trigonum*, vel *tetragonum*, vel *pentagonum*, vel *hexagonum* &c: putà quando Bases sint duo plana Triangula, ut patet in allato exemplo, Prisma dicitur *trigonum*: quando autem fuerint duo Plana quadrilatera, Prisma denominabitur *tetragonum*; quando verò bases fuerint duo Pentagoni, Prisma quoque dicetur *pentagonum*, &c.

11 A multitudine verò omnium Planorum ipsum comprehendentium Prisma denominatur vel *pentaëdrum*, vel *hexaëdrum*, &c. Ut idem Prisma A E dicitur *pentaëdrum*, quia quinque sub Planis omninò comprehenditur; & ita consequenter *hexaëdrum* quod sub sex &c.

12 *Universaliter tamen* (ait August. à Puteo in Gnom. biform.) *quando basis plures habet angulos quam quatuor, & Prisma plura latera quàm quatuor, appellatur Polyedrum*.

13 *Parallelepipedum* est illud *hexaëdrum* Prisma, quod sex Parallelogrammis comprehenditur, quorum duo quælibet opposita sunt parallela. Unde tot sunt Parallelepipedorum genera, quot Parallelogrammorū; nempe quatuor: *Cubus* scilicet, *Altera parte longius*, *Rhombicum*, & *Rhomboidicum*.

Ca-

14 *Cubus* est illud Parallelepipedum quod sub sex Quadratis comprehenditur æqualibus.

15 *Alterâ parte longius Parallelepipedum* est, quod sub Planis oblongis comprehenditur; licet aliqua ex eis opposita sint Quadrata.

16 *Rhombicum Parallelepipedum* est, quod sub Rhombis comprehenditur; esto similiter ex sex Planis aliqua sint rectangula.

17 *Rhomboidicum Parallelepipedum* est, quod sub Rhomboidibus continetur; esto pariter ex sex Planis aliqua sint rectangula.

18 *Trapezium solidum* (ait idem August. qui suprà) *est cujus opposita Plana neque parallela sunt, neque æqualia*: cujusmodi sunt omnia solida, quæ plana habent latera, nec tamen sunt Pyramides, neque Prismata.

19 Præterea ex planilateris figuris quinque velut dignitates ab Euclide recensentur; suntque *Cubus*, *Tetraëdrum*, *Octaëdrum*, *Dodecaëdrum*, & *Icosaëdrum*.

20 *Cubus est figura solida quæ sub sex Quadratis æqualibus continetur*. Hoc est illud Parallelepipedum, quod sub sex Planis quadratis & æqualibus comprehenditur, cujus scilicet longitudinem, latitudinem, & crassitudinem metiuntur tres æquales rectæ lineæ in extremo perpendiculariter se mutuò tangentes. Ut *Talus* vel *Tessera lusoria*. Frequentissimus autem est Cubi usus apud Geodetas in mensurandis Solidorum Areis &c. *Def. 25. 11.*

21 *Tetraëdrum est figura Solida, quæ Triangulis quatuor æqualibus, & æquilateris continetur*. Hoc est ea Pyramis trigona, cujus basis & latera sunt quatuor Triangula isopleura, & æqualia. *Def. 26. 11.*

22 *Octaëdrum est figura solida, quæ octo Triangulis æqualibus, & æquilateris continetur*. *Def. 27. 11.*

23 *Dodecaëdrum est figura solida, quæ duodecim Pentagonis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis continetur*. *Def. 28. 11.*

24 *Icosaëdrum est figura solida, quæ Triangulis viginti æqualibus, & æquilateris continetur*. *Def. 29. 11.*

25 Præter has autem quinque solidas figuras nullum aliud constitui potest Solidum regulare, quod Planis scilicet & æquilateris, & æquiangulis contineatur

tur inter se æqualibus. Ideoque à nonnullis corpora Platonica sive simplicia nuncupantur, utpotè quæ ab eo quinque Mundi corporibus assimilata sunt: putà, Dodecaëdrum Cœlo, Tetraëdrum Igni, Octaëdrum Aëri, Icosaëdrum Aquæ, & Cubus Telluri.

26 *Similes figuræ solidæ* (quas in planilateris definit Euclides) *sunt, quæ similibus Planis, multitudine*
Def. 9. 11. *æqualibus continentur.* Quæ verò sint similia Plana, habes *suprà §.1.n.66, vel §.3.n.70, & in Euclide def. 1.6.* Dicuntur ergo similes figuræ solidæ, quæ vel sub quatuor, vel sub quinque, vel sub sex, vel sub octo &c: similibus Planis singulæ continentur.

27 *Æquales & similes figuræ solidæ sunt, quæ similibus Planis, multitudine, & magnitudine æquali-*
Def. 10. 11. *bus, continentur.* Hoc est ad hoc, ut similes figuræ dicantur æquales, oportet, eas Planis contineri non solùm numero æqualibus, verùm etiam & magnitudine æqualibus.

28 *Curvilateram* figuram solidam hìc vocamus, quæ sub pluribus curvis superficiebus comprehenditur. cujusmodi est figura *lenticularis*.

29 *Lenticularis* enim figura dicitur, quæ ex duobus æqualibus Sphœræ Segmentis uno mediante Circulo sibi invicem copulatis resultare videtur: cujus centrum est idem Circuli centrum. Diametros autem duas habet præcipuas; maximam scilicet, quæ est ejusdem Circuli quævis Diameter; minimam verò, quæ unica est, priorem orthogonaliter intersecans, atque Axis evadit figuræ.

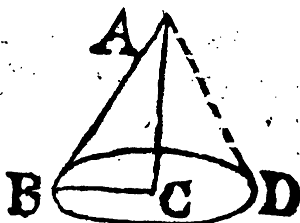
30 *Mixtilatera* figura solida est, quæ sub planâ & curvâ superficie comprehenditur. Cujusmodi sunt *Conus & Cylindrus*.

Definitiones hìc prius apponam Euclidis circa Conum & Cylindrum; deinde verò eas Apollonii & Sereni, velut universaliores adducam.

31 *Conus* autem per circumductionem Trianguli orthogonii sic ab Euclide definitur: *Conus est figura quæ*
Def. 18. 11. *converso circum quiescens alterum latus eorum, quæ rectum angulum continent, Triangulo orthogonio continetur, cùm in eumdem rursus locum illud Triangulum restitutum fuerit, unde moveri cœperat.*

At-

Atque si quiescens recta linea (idest Crus) *aequalis sit alteri, quae circa rectum angulum convertitur rectangulus erit Conus: sin minor, amblygonius: si verò major, oxygonius.* Ut si circum quiescens crus A C Triangulum orthogonium A B C circumducatur ex B in D donec restituatur in B: jam crus alterum C B circulum describet D B; hypotenusa verò A B describet superficiem ad seipsam inclinatam atque in puncto A collectam, quam *Conicam* vocamus. Quod igitur sub hac *conica* superficie, & *Circulo* comprehenditur, Solidum est, quod *Conus* nuncupatur.



32 Vertex Coni est punctum A in quo scilicet fit angulus conicus B A D, qui rectus erit, si aequalia fuerint Trianguli crura C A, C B, & ob hoc rectangulus dicetur Conus, utpotè rectum habens angulum in vertice A. Obtusus autem erit angulus, si quiescens crus A C minus fuerit altero C B; tuncque amblygonius denominabitur Conus, obtusum scilicet habens angulum in A. Acutus verò erit angulus, si quiescens crus A C majus fuerit altero C B, ut videtur in allato exemplo, ideoque Oxygonius appellabitur Conus, quia acutum habet angulum in A.

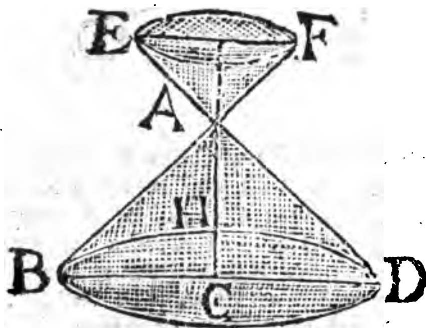
33 *Axis autem Coni est quiescens illa linea* (seu crus), *circum quam Triangulum vertitur*. Ut in allato exemplo est quiescens crus AC Trianguli ACB. *Def.* 19. 11.

34 *Basis verò Coni, circulus est, qui à circumductâ lineâ rectâ, seu crure altero, describitur*. Ut Circulus BD, *Def.* 20. 11.

BD, quem describit crus alterum CB in circumductione Trianguli ABC.

Quoniam autem *rectum* dumtaxat Euclides hic definit Conum, cujus scilicet Axis sit ad basin *rectus*; non verò *obliquum*, cujus scilicet axis non sit ad basin rectus, sed inclinatus & obliquus. Ideò ex Apollonio generalem quamdam hic afferimus definitionem, quæ tum *rectum*, tum *inclinatum* includat *Conum*. Ipse autem antequam Conum definiat, superficiem docet construi conicam his verbis. *lib.*1.*Conicorum*.

35 *Si ab aliquo puncto ad circumferentiam Circuli, qui non sit in eodem Plano, in quo punctum, conjuncta recta linea in utramque partem producatur; & manente puncto, convertatur circa Circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri: superficiem à rectâ lineâ descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis,*



quarum utraque in infinitum augetur, nimirum rectâ lineâ, quæ eam describit, in infinitum productâ, voco „ *Conicam superficiem*. Hoc est (ut breviter ait *P. De-* „ *chales*) Conica superficies est, quæ describitur à re- „ ctâ lineâ percurrente integram circuli peripheriam, „ circa punctum extra planum circuli assumptum. Ut si ab aliquo sublimi puncto A extra circulum BD as-

assumpto linea recta A B, immobilis quidem in puncto A, percurrat totam subjecti Circuli B D peripheriam, quòusque ad eum locum redeat, à quo moveri cœperat; jam aliquam ad seipsam inclinatam, atque in puncto A collectam, describet superficiem A B D, quæ *Conica* vocatur. Et similiter si producta intelligatur eadem recta A B ex A in F, jam eodẽ motu generabitur altera *conica* superficies A F E, ad verticem priori opposita: quæ scilicet ambæ ad eumdem verticem A inter se aptatæ sunt, & concurrentes, ut vides.

36 *Verticem ipsius, manens punctum.* Hoc est, verticem Author vocat punctum illud immotum A, in quo conica superficies colligitur.

37 *Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli dividitur.* Hoc est rectam lineam A C, quæ à vertice A ad centrum C subpositi Circuli ducitur, Axem vocat.

38 *Conum autem voco figuram contentam circulo, & conicâ superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam, interjicitur.* Hoc est totum illud Solidum A B D, quod sub tali conicâ superficie, & tali Circulo comprehenditur, *Conus* vocatur.

39 Cujus *Vertex* & *Axis* idem sunt, ac ejus superficiei Conicæ: nimirum, vertex A, & axis A C.

40 *Coni oppositi* sunt, qui ad verticem circa eumdem axem existunt. Ut Coni A B D, A F E.

41 *Basim, circulum ipsum.* Hoc est Basin vocat Circulum illum, cujus peripheriam in descriptione conicæ superficiei recta linea percurrerit. Ut Circulus B D, cujus peripheriam percurrit recta linea A B, vocatur *Basis* Coni.

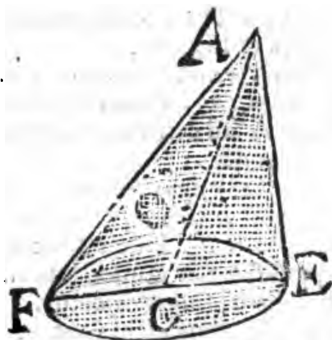
42 *Latera* Coni dici possunt velut duæ rectæ A B, A D ex eodem vertice A prodeuntes, & Basis peripheriam tangentes in duobus punctis B & D diametraliter oppositis. Vel sunt latera Trianguli, quod exhibetur, quando Conus dividitur è vertice in basin per axem: Ut Trianguli A B D latera A B, A D.

43 *Angulus* Coni, erit laterum inclinatio. Ut B A D.

44 *Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.* Hoc est Conus dicitur

rectus, quando ejus axis perpendicularis est ad Planum basis. Ut Conus A B D dicitur *rectus*, quia axis ejus A C perpendiculariter insistit Plano Circuli BD, qui basis est Coni.

45 *Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.* Hoc est Conus dicitur *Scalenus*, quãdo ejus axis ad Planũ basis obliquus est. Ut Conus A F E dicitur scalenus, quia ejus axis A C obliquè insistit Plano Circuli E F, qui basis est Coni.



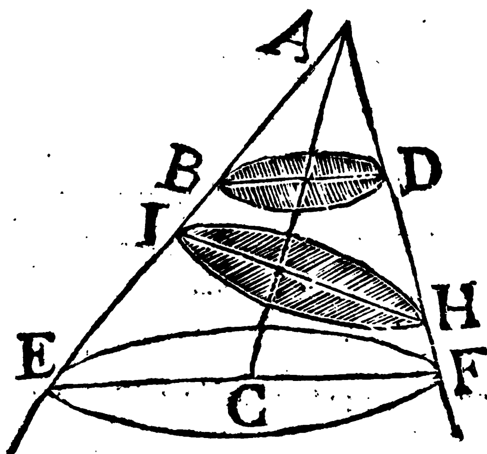
46 *Sectio conica est plana figura à Plano dividente Conum in superficie Coni effecta.* Hoc est figura illa plana, quam Planum conotomum, (idest, dividens Conum) relinquit sive format in Cono. Vel, quam intuemur in ea Coni parte, ubi facta est ejus sectio.

47 Planum autem conotomum multifariam potest Conum dividere; Unde quintuplex efficitur conica sectio, nempe; *Triangulum*, *Circulus*, *Parabola*, *Ellypsis*, & *Hyperbola*.

48 *Triangulum* in Cono est illa sectio, quam facit Planum conotomum secans Conum è vertice in basin, sive per axem, sive extra axem: communis enim sectio Plani conotomi & Coni, quam ibi intuemur, Triangulum est; quæ tamen, si è vertice facta sit per axem, appellabitur *Triangulum per axem*, quòd Conum dividet in duos æquales *Semiconos*, & ejus verticalis angulus æqualis erit angulo Coni; si verò sectio fiat extra axem,

axem, ejus angulus verticalis erit minor angulo Coni. Reliquas autem, quæ in Cono fieri dicuntur sectiones, omnes *rectas* esse ad Planum Trianguli per axem, oportet intelligi.

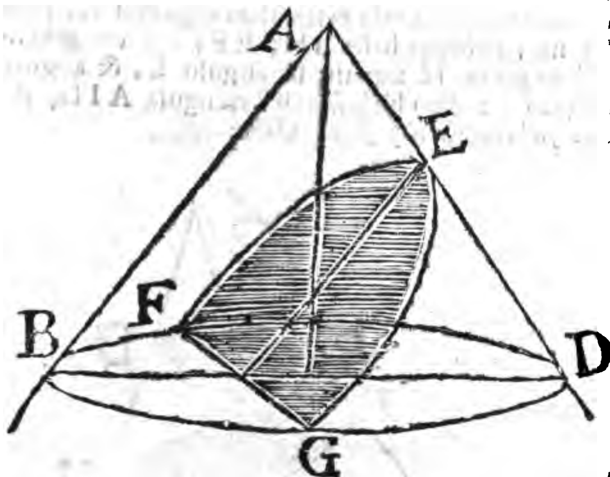
49 *Subcontraria positio duorum Triangulorum, est duorum Triangulorum similium, & eumdem angulum verticalem habentium, dispositio, qua bases nec congruentes, nec parallelas habent.* Ut in Cono scaleno AEF, qui supponatur è vertice A in basin EF bifariam sectus per axem AC, ita ut ejus Planum dividens sit Triangulum per axem AEF, *rectum* quidem ad Planum basis EF: si deinde Conus altero Plano HI, ad idem Triangulum recto, ita secari intelligatur, ut jam duo similia Triangula AIH, AEF communem habentia verticalem angulum A, parallelas non habeant bases IH, EF, nec congruentes; sed angulus H æqualis sit angulo E, & angulus I angulo F: dico hujusmodi Triangula AIH, AEF esse *subcontrariè posita*. Unde



50 *Subcontraria Coni sectio ea est, qua Conus ita secatur Planis ad Triangulum per axem rectis: Ut fiant duo Triangula subcontrariè posita.* Ut patet in eodem Scaleni exemplo, ubi sectio IH dicitur subcontraria respectu basis EF.

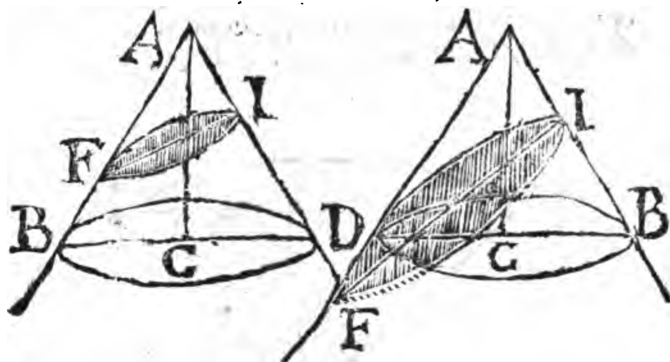
51 *Circulus* in Cono est illa sectio, quæ parallela sit basi, aut subcontraria. Ut in eodem Scaleno Cono A E F sectio B D parallela basi E F, *Circulus* est; sicut & sectio I H ei subcontraria, etiam *Circulus* est: ut pulchrè demonstrat *P. Dechales in* 6. 4. *Conicorum Apollonii.*

52 *Parabola* est ea Coni sectio, quæ fit à conotomo Plano uni lateri Trianguli per axem parallelo. Ut in Cono A B D, sectio F E G parallela uni lateri Trianguli per axem, & ad ejus Planum recta, est *Parabola*.

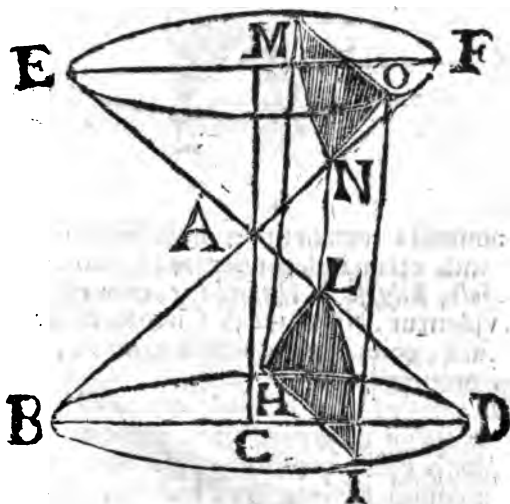


53 *Ellypsis* est ea Coni sectio, quæ, nec parallela cùm sit basi, neque subcontraria, latus tamen utrumque Trianguli per axem secat infra verticem, sive totaliter intra Conum, sive partialiter extra ipsum, producto tunc scilicet uno latere infra verticem. Ut in Cono A B D sectio F I, quæ fit à Plano F I latus utrumque A B, A D Trianguli per axem infra ver-

ticem ſecante; nec tamen baſi BD parallela eſt, nec ſubcontraria, dicetur *Ellypſis*.

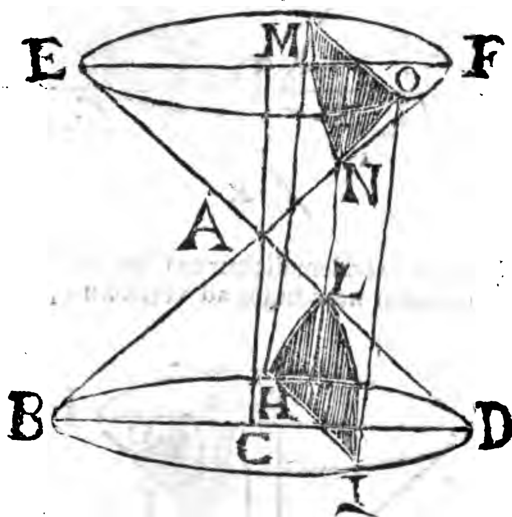


54 *Hyperbola* tandem dicitur ea Coni ſectio, quæ fit à Plano conum utrumque ad verticem oppoſitos



extra verticem ſecante. Unde uno Plano Conos ad verticem oppoſitos ſecante, duæ fiunt Hyperbolæ ſibi invi-

invicem oppositæ, & omnino similes. Ut in duobus Conis A B D, A E F ad verticem A oppositis, sectiones H L I, M N O, ab eodem Plano M O I H Conum utrumq; secante, effectæ, dicuntur *Hyperbolæ* oppositæ, quia ad verticem opponuntur, sicut & Coni, eamdemq; Diametrum habent N L prolongam.

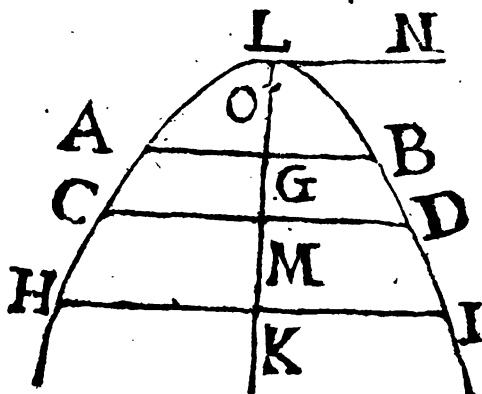


Porro nonnulla remanent in hujusmodi sectionibus consideranda etiam independenter à Cono, præsertim in *Parabolâ*, *Ellypsi*, & *Hyperbolis*, quæ reliquis difficiliores videntur. Nam quæ de Circulo, & Triangulo dici possunt, coincidunt omninò cum iis, quæ satis acta sunt propriis in locis.

55 *Diameter igitur sectionis conicæ est linea recta, quæ omnes eidem rectæ parallelas*, atque in eodem conicæ sectionis Plano constitutas *bifariam dividit*. Ut in quavis conicâ sectione sive Parabolâ, sive Ellypsi, sive Hyperbolâ H L I, Diameter est quævis recta L K, quæ parallelas omnes A B, C D, H I &c in Plano figuræ ductas bifariam dividit in punctis ver:

gra:

gra: G, M, & K, ſive rectos angulos faciens, ſive obliquos.



56 *Ordinatim applicata eſt una qualibet parallelarum à Diametro bifariam diviſarum.* Ut recta quælibet parallelarum A B, C D, H I &c. Licet communiter intelligatur ejus dimidia pars: ut G B, vel MD, vel K I &c.

57 *Axis eſt Diameter ordinatim applicatas bifariam, & perpendiculariter dividens.* Ut Diameter LK, quæ non ſolum bifariam, verùm & orthogonaliter, ſeu ut dicitur ad angulos rectos, interſecat ordinatim applicatas H I, C D, A B, dicetur Axis conicæ ſectionis H L I. Sunt autem in hujuſmodi figuris aliæ Diametri, quæ ordinatim applicatas bifariam dividere poſſunt, licet eas non orthogonaliter ſecent; & ideo Axes eſſe non poſſunt.

58 *Vertex figuræ eſt extremitas axis.* Velut punctum L communis ſcilicet contactus curvæ lineæ cum Axe.

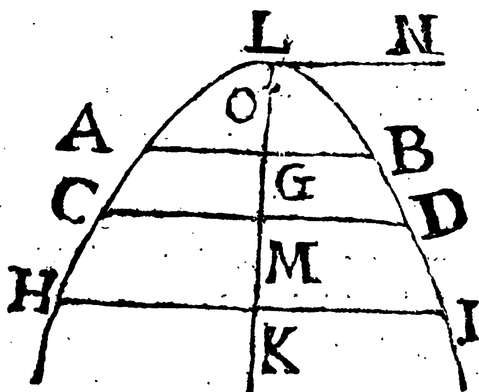
59 *Sagitta eſt ſegmentum Diametri inter applicatam, & verticem interceptum.* Ut ſegmentum G L eſt Sagitta *applicatæ* G B, & ſegmentum K L eſt Sagitta *applicatæ* K I.

60 *Parameter, ſeu latus rectum, eſt recta in extremitate Diametri ad Diametrum perpendiculariter ducta,*

sta, qua utimur tamquam mensura ad metiendum Quadrata applicatarum. Ut recta L N. In Parabolâ enim Rectangulum comprehensum sub Parametro, & Sagittâ, est *applicatæ* Quadrato æquale. In Ellypsi Quadratum *applicatæ* deficit à Rectangulo comprehenso sub Parametro, & Sagittâ. In Hyperbolâ verò Quadratum *applicatæ* superat Rectangulum sub Parametro, & Sagittâ comprehensum. *Et inde figuræ istæ nomen sortitæ sunt*; ait August: à puteo Episag. 3. cap. 9; *Nimirum Parabola, æqualis: Ellypsis, deficiens sive defectus: Et Hyperbola, excedens sive excessus.*

61 In Parabolâ igitur, cum omnes Diametri sint axi parallelæ, nullum est centrum.

62 *Umbilicus verò, sive Focus, & Polus, Parabolæ est punctum in axe distans à vertice quartâ parte parametri. Ut si* L K *sit axis, &* L O *sit quarta pars Parametri* L N; *erit punctum* O *Umbilicus seu Focus Parabolæ* H L I. *Sic dictus quòd peculiares habeat proprietates; in primis quòd omnes radii luminosi axi paralleli in eo uniantur.* Unde Speculum construimus Parabolicum ustorium, quod scilicet receptos luminis radios in unum punctum nempe Focum reflectens, vehementer comburit.

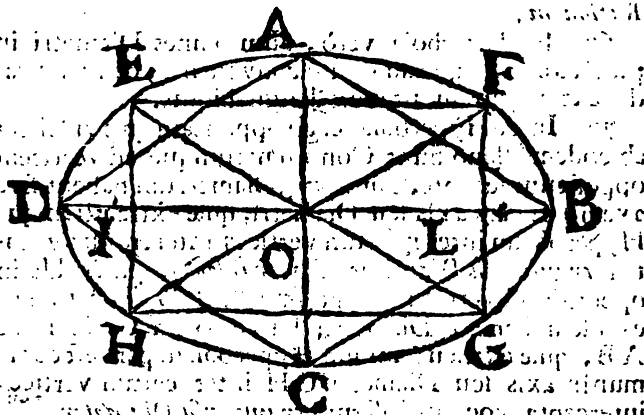


63 At in Ellypsi, cùm omnes Diametri se mutuò bifariam secent in aliquo puncto intra figuram posito,

erit

erit hoc punctum Ellypsis *centrum*. Ut Diametri DB punctum medium O intra Ellypsin ABCD positum, centrum dicitur Ellypsis. Insuper Diametrorum quælibet Ellypsin bifariam dividit.

64 *Conjugatæ Diametri in Ellypsi sunt duæ Diametri, quarum utraque alteri æquidistantes bifariam dividit.* Ut in Ellypsi ABCD, Diametri EG, HF dicuntur *conjugatæ*, si earum altera putà EG bifariam dividat rectas omnes AD, BC, parallelas alteri Diametro HF: sicuti & HF bifariam dividat omnes rectas AB, DC parallelas alteri Diametro EG.



65 *Axes* in Ellypsi duo sunt, ejus scilicet maxima, & minima Diameter, orthogonaliter in centro sese intersecantes, quæ & *conjugati axes* nuncupantur. Ut Diametri, BD maxima, & AB minima, se mutuò secantes ad angulos rectos in centro O, *Axes* sunt Ellypsis, & *conjugati axes* nominantur.

66 *Umbilici, seu Poli, & Foci, Ellypsis, aut puncta ex comparatione, sunt puncta in axe maiore sumpta, ita eum dividentia, ut Rectangulum sub segmentis ejus comprehensum æquale sit quartæ parti figuræ; hoc est æquale sit Quadrato semiaxis maioris.* Facilis autem est hujusmodi *Focorum* inventio. Datâ enim Ellypsi

A B C D, si ad intervallum semiaxis majoris D O, ab extremitate minoris axis A, offendantur hinc-inde in axe majore duo puncta I, & L: hæc erunt Ellypsis *Foci* seu *Umbilici*, in quibus profectò mirabilis servatur proprietas, quòd radius luminosus ab uno Foco procedens semper in alterum Focum reflectitur, proindeque duæ rectæ à Focis in idem peripheriæ punctum coeuntes sunt æquales axi majori.

67 Ellypsis multæ sunt species. Multiplicatio autem specifica Ellypsis sumitur ex diversitate Rationis, quam habebit Diameter ad Parametrum.

68 *Similes Ellypses sunt, quarum conjugatæ Diametri ad angulos æquales sese secantes, eamdem habent Rationem.*

69 In Hyperbolâ verò, cùm omnes Diametri in puncto extra figuram posito conveniant, centrum cadet extra figuram, ut mox designabimus.

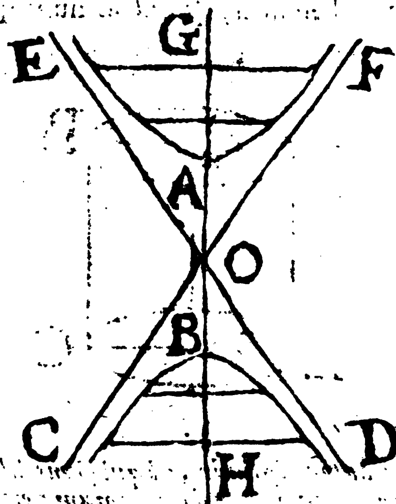
70 Inter Hyperbolas ergo oppositas (quæ videlicet ab eodem Plano fiunt Conum utrumque ad verticem oppositum secante, eamdemq; Diametrum habent, sive axem) ea pars axis seu Diametri, quæ extra utramque Hyperbolam inter ipsarum vertices intercipitur, vocatur *transversa Diameter*, seu *transversus axis*. Ut in oppositis ad verticem Hyperbolis C B D, E A F, quæ eamdem habent Diametrum sive axem G H: linea A B, quæ extra utramque Hyperbolam pars est communis axis seu Diametri G H inter earum vertices intercepta, vocatur ipsarum *transversa Diameter*.

71 Si verò *transversa Diameter* bifariam dividatur, ut in O; erit punctum O (dimidium scilicet transversæ Diametri A B) commune Hyperbolarum centrum, in quo omnes Diametri convenient.

72 *Asymptotos* est linea recta è centro Hyperbolarum extra Hyperbolam ducta, talis naturæ, ut quò magis producatur, etiam in infinitum, eò magis ad Hyperbolam accedat, sed numquam ei conjungetur: unde *asymptoti* nomen accipit, idest sine conjunctione. Ut quælibet ex rectis O C, O D, O E, O F ab eodem Hyperbolarum centro O extra Hyperbolam ducta, quæ quò longior fit, eò magis ad Hyperbolam accedet, sed numquam cum ea conveniet, dicitur *Asymptotos*.

Um-

73 *Umbilicum* habet utraque Hyperbola ad verticem opposita, punctum scilicet in communi Diametro sive axe intra figuram positum; pro cujus tamen inventione vide laudatum *P. Dechales in propos. 50. lib. 3. Conic. Apoll.* aliosve.

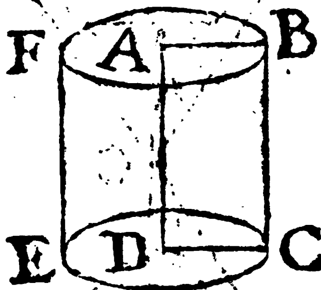


74 Hinc *Ovale* seu *Sphæroïs*, cùm sit corpus sub unicâ superficie elypticâ comprehensum, omnia ferè communia habet cum Ellypsi, putà *Diametros conjugatas, ordinatim applicatas, Centrum, Umbilicos &c.* præter axes. *Axis* enim in Ovali semper unicus est, nimirum ejus maxima Diameter.

75 *Cylindrum* Euclides definit per circumductionem Parallelogrammi rectanguli, dicens: *Cylindrus figura est, quæ conversa circumquiescente uno laterum eorum, quæ rectum angulum continent, parallelogrammo orthogonio* (idest rectangulo) *comprehenditur, cum in eundem rursus locum restitutum fuerit illud parallelogrammum, unde moveri cœperat.* Ut si circum quiescens latus AD Parallelogrammum AC cir- *Def.21.11.*

 cum-

circumduci intelligatur ex C in E, donec restituatur iterum in C, unde moveri cœperat: jam ejus latera opposita AB, DC duos oppositos describent Circulos BF, CE æquales & parallelos; latusque BC superficiem formabit curvam Circulos ipsos conjungentem, quam *Cylindricam* vocamus. Solidum igitur, quod sub hac Cylindricâ Superficie, & utroque Circulo comprehenditur, *Cylindrus* nuncupatur.



Def.22.11. 76 *Axis autem Cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum vertitur.* Ut quiescens latus AD circumfluentis Parallelogrammi AC.

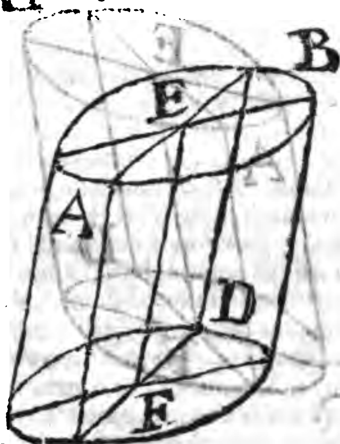
Def.23.11. 77 *Bases verò Cylindri, sunt Circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.* Ut duo oppositi Circuli æquales, & paralleli BF, CE, quos describunt duo opposita Parallelogrammi latera AB, DC in gyrum ducta.

Quoniam verò similiter *rectum* hic Euclides definit Cylindrum, cujus videlicet axis ad utramque basin *rectus* est (quemadmodum vidimus in Cono); non verò *inclinatum*. Ideo nonnullas ex Sereno hic oportet afferre definitiones, quæ Cylindrum tum *rectum*, tum *inclinatum* explicabunt. Cylindricam ergo superficiem ita construendam docet Serenus, initio primi libri *de Sect. Cylind.*

78 *Si duorum Circulorum æqualium, & æquidi-*

stantium Diametri semper inter sese æquidistanter, & ipsæ in Circulorum Planis circa manens centrum circumferuntur, & simul circumferatur recta linea Diametrorum terminos ex eâdem parte conjungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moveri cœpit: Superficies, quæ à circumlatâ rectâ lineâ describitur, Cylindrica superficies vocetur, quæ quidem & in infinitum augeri potest, lineâ ipsâ describente in infinitum productâ. Hoc est (ut breviter transsumit P. Dechales) Cylindrica superficies ea est, quæ producitur motu lineæ conjungentis Radios Circulorũ æqualium, & parallelorum æquidistanter translatæ. Ut si duo sint Circuli æquales, & paralleli A B, C D, quorum Diametri, sive Radii E B, F D, vel E A, F C æqualiter, & æquidistanter moveantur ex centris E, & F: Dico quòd recta quæcumque B D, vel A C Radiorum extrema conjungens, totam percurrendo utriusque Circuli peripheriam, superficiem describit C D A B, quam *Cylindricam* vocamus. Igitur

79 *Cylindrus est figura solida, quæ Circulis æquidistantibus, & cylindricâ superficie inter ipsos interjectâ, continetur.* Ut Cylindrus A D.



80 *Cylindri Bases sunt circuli ipsi.* Ut in eodem

Cy-

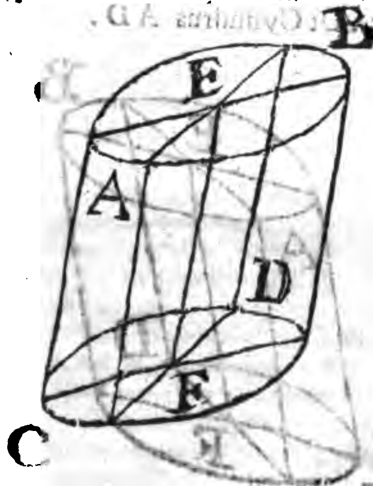
Cylindro A D, Bases sunt duo Circuli A B, C D.

81 *Axis, recta linea, quæ per Circulorum centra ducitur.* Ut recta E F basium centra E, & F, connectens.

82 *Latus autem Cylindri, linea, quæ cùm recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases utrasque contingit; quam & circumlatam, Cylindri superficiem describere antea diximus.* Ut ipsa recta B D, vel A C, cujus translatione Cylindricam diximus produci Superficiem C D A B.

83 *Cylindrorum, Recti quidem dicuntur qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.* Ut in priore exemplo, Cylindrus F B E C, qui axem habet AD utrique basi ad rectos angulos insistentem, rectus dicitur Cylindrus.

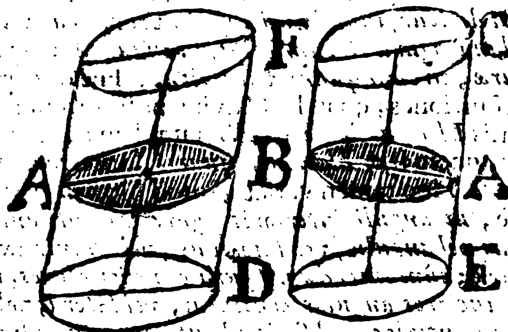
84 *Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.* Ut Cylindrus B C, cujus Axis E F est ad bases inclinatus seu quod idem est: Qui axem habet F E utrique circulo nequaquam perpendiculariter insistentem.



85 Sectio Cylindrica, est plana figura à Plano Cylindrum dividente, in superficie Cylindri, effecta. Quæ triplex est; bilaterum, *Parallelogrammum*, *Circulus*, & *Ellypsis*.

86 *Parallelogrammum* in Cylindro est illa sectio, quæ fit à Plano basin utramque Cylindri dividente sive per axem, sive extra axem. Ut in Cylindro Parallelogrammum FGED.

87 *Circulus* in Cylindro est illa sectio, quæ fit à Plano basibus parallelo: vel ab alio Plano sectionem subcontrariè positam faciente. Ut sectio AB in Cylindro CD, *Circulus* est.



88 *Subcontrariè positam* hîc similiter intelliges sectionem eo modo, quò explicavimus in Cono *suprà n.* 50. Ut scilicet si Planum BA, rectum quidem ad Planum Parallelogrammi per axem CD, ita Cylindrum secet, quòd angulus BAC æqualis sit angulo FDE; & angulus FBA æqualis sit angulo CED: erit sectio BA inter bases *subcontrariè posita.*

89 *Ellypsis* in Cylindro est ea sectio, quæ nec basibus est parallela, nec subcontrariè posita; quæ quidem similis est Conicæ Ellypsi; cum ei conveniat eadem definitio. Quare omnia, quæ suprà diximus de Diametris, Axibus, Parametro, Centro, Ordinatis, aliisque ejus proprietatibus, æqualiter sunt hîc applicanda.

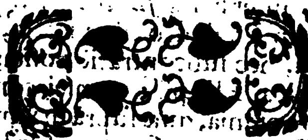
90 *Similes Coni, & Cylindri sunt, quorum & axes, & basium Diametri proportionales sunt.* Hîc tantùm *rectos* Conos, aut Cylindros comparat Euclides, dicens: quòd similes erunt, si proportionales habuerint *Def.24.11.*

axes,

axes, & basium Diametros. Hoc est similes erunt, si erit ut axis unius Coni sive Cylindri, ad Diametrum ejus basis; ita axis alterius Coni sive Cylindri, ad Diametrum ejus basis. In Scalenis autem seu inclinatis oportet addere, quòd axes sint ad Bases similiter inclinati, *suprà cap. 4. §. 2. n. 25.*

91 *Solida figura in solidâ figurâ dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique Planis figuræ, cui inscribitur.*

92 *Solida figura circum solidam figuram vicissim describi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique Plana figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.* Hæ duæ postremæ definitiones, quas P. Clavius posuit in suis Commentariis *Element. XI. Euclidis*, eumdem habent intellectum, quem illæ *Elementi quarti* suprà relatæ §. 3. *n.* 64. *&c.* Hoc tamen variato, quòd hîc *non est necesse*, ait ipse, *ut anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel Planis exterioris figuræ; cùm interdùm figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel Plana, quam interior. Sed satis est, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot Plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à Planis figuræ exterioris.*



SECTIO POSTERIOR.

In quà

Postulata & Axiomata explanantur, quæ ad Elementorum Euclidis libros præmittuntur.

1 INveterata Mathematicorum est consuetudo, omne, quod circa facultatis hujus objectum sive affirmativè, sive negativè enunciandum occurrit, *Propositionis* nomine titulare; quam tamen distinguunt in *Axioma*, *Theorema*, *Problema*, & *Postulatum*.

2 *Axioma* dicitur illa Propositio, quæ per se notum aliquid, atque indemonstrabile proponit, cujus scilicet veritas solo Mentis lumine ex ipsâ terminorum notione per se satis est manifesta. Ut hoc axioma: *Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia*: quid hoc clarius? Unde ob excellentem evidentiam solent hujusmodi propositiones, nuncupari *Dignitates* seu *Pronuncinta*.

3 *Theorema* dicitur illa Propositio, quâ aliquod contemplamur, cujus tamen veritas non ita clarè patescit ex terminis, sed indiget ratiocinio seu demonstratione, ut evidenter Menti sese offerat. Ut in hoc theoremate: *In omni Triangulo rectilineo sunt tres anguli æquivalentes duobus rectis*: Triangulum contemplamur habere tres angulos duobus rectis angulis æquivalentes: cujus nempè veritas, licèt ex ipsis terminis non videatur satis manifesta, tamen adhibito demonstrationis lumine, statim evidenter innotescit: cogiturque præterea Mens ad assentiendum proposito, etiam contra sensum.

4 *Problema* dicitur ea Propositio, quæ difficilem operationem jubet, seu faciendum aliquod proponit difficile, reique jam factæ demonstrationem in mediū adfert. Ut hoc problema: *Super datam rectam Trian-*

gulum æquilaterum construere; jubet fieri Triangulum isopleurum super datam rectam lineam, quod tamen jam factum demonstratione manifestat.

5 *Postulatum* tandem est ea Propositio, quæ facilem operationem jubet, seu faciendum aliquod concedi postulat, quod ita facile est, ut nec Mens nostra multum laboret in ejus apprehensione, nec ulla sit delineationis varietas, aut difficultas in executione.

6 Cœterùm omnes *puræ Mathesis* Propositiones, cùm circa Quantitatem intelligibilem versentur, nullum opus concernunt sensibile, sed intra fines solius intellectionis sistunt: idque quod proponunt, sive per se notum sit, sive detegendum occurrat, sive merè speculativè, sive practicè obeundum, constanter ab omni sensibili materiâ prorsus abstractum ipsum oportet considerare. Sicque sive facilem, sive difficilem jubeant operationem, tantùm intellectuale opus importabunt.

7 Videmus autem Postulatum hoc habere commune cum Axiomate, quòd neutrum eorum demonstratione indigeat; sed simpliciter habentur pro veris, certis, & manifestis mathematicalium principiis; Problemata verò & Theoremata commune ministerium habere ratiocinii, & demonstrationis, ut ad principiorum evidentiam resolvantur. Differunt tamen Postulata ab Axiomatis ratione, qua Problemata à Theorematis. Nam quemadmodum in Theoremate nihil facimus, sed id contemplari intendimus, quod rem consequitur subjectam; & in Problemate aliquid efficere, quod faciendum proponitur. Ita etiam in Axiomatis ea sumuntur, quæ per se facilem habent apprehensionem, atque suâ naturâ satis nota sunt, & manifesta; in Postulatis verò ea quæsita sumuntur, quæ facilem habent effectionem, ita ut nullus sit nostræ Mentis labor, aut difficultas in talium efformatione. *Quare* (benè concludit Isaac Monachus in suis Scholiis in Euclid. Element.) *cognitio aperta, & indemonstrabilis: & assumptio propositi absque demonstratione: distinguunt Axiomata, ac Postulata. Sicut cognitio per demonstrationem facta: & quæstionis sumptio per delineationem facta: discernunt Theoremata à Problematibus.*

8 Postulatum itaque tamquam factu facile, & Axioma

ma tamquam cognitu facile, conveniunt in facilitate apprehensionis: unde simplicem, comprehensibilem, & immediatè per se notam habent naturam. Sicut Theorema speculatione difficile, & Problema effectione difficile, conveniunt in difficultate comprehensionis: ideòque ratiocinio indigent, ut eorum veritas evidenter elucescat. Et tandem Postulatum tamquam factu facile, & Problema tamquam factu difficile, conveniunt in hoc, quod operationem proponunt: sicut & Axioma tamquam cognitu facile, & Theorema tamquam cognitu difficile, conveniunt in hoc, quòd in purâ contemplatione sistunt.

9 Præter hæc autem, cùm aliqua demonstrabilis Propositio præmittitur ad aliquod præcipuum, & fundamentale Theorema demonstrandum: talis Propositio *Lemma* vocatur.

10 Si verò propositi veritate detectâ, aliquid aliud fit, quod manifestè appareat: hoc *Corollarium* appellatur.

11 Mathesis autem cùm rigorosæ scientiæ leges observet: quod est à simplicioribus, notissimis, & facilioribus, ad composita, ignota, & difficilia procedere: incipit à definitionibus, & divisionibus (quas in toto hoc opusculo videmur satis percurrisse): deinde quædam concedi postulat, ut Problemata solvat: Et tandem Axiomata fundat, ut Theoremata demonstret.

12 Ad Theoremata revocari solent Axiomata: sicut & ad Problemata Postulata: cùm videlicet eorum quidpiam aliquam videatur involvere difficultatem præsertim ob rudem concipientis apprehensionem.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠

CAPUT I.

Postulata sive Petitiones.

POstulata tria proponit Euclides.

I.

Postuletur, ut à quovis in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur. Quid hoc facilius proponi potest, quàm inter duo data puncta rectam lineam ducere? Hoc ergo jubet Euclides postulare, ut fieri concedatur.

II.

Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere. Postulat hìc, Mathematico concedi, rectam lineam terminatam posse prolongare quantùm voluerit: dùmmodo in productione nec angulus fiat, nec linea ipsa à suâ rectitudine ullatenus divertatur.

III.

Item quovis centro, & intervallo circulum describere. Itidem hìc postulat Mathematicus, quòd sibi concedatur, ex dato puncto, tamquam è centro, ad quodcumque intervallum sive circini apertionem, Circulum posse describere.

Quæ omnia, cùm facilem habeant apprehensionem non minùs, ac effectionem, sintque quædam generales propositiones, ex ipsis collectæ definitionibus, pendenter ab auditore concedenda postulantur, & communiter ab omnibus sine demonstratione simpliciter assumuntur in ordinem principii.

****

CAPUT II.

Axiomata.

DUodecim tantùm Axiomata congessit Euclides, quæ etiam *Communes notiones*, *Pronunciata*, *Dignitates*, & *Effata* nuncupari solent; quibus tamen nonnulla adjiciuntur alia ex veterum Geometrarum sententiis desumpta, jure meritò & nomen Axiomatis sibi vendicantia & munus.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Ut si duæ lineæ fuerint æquales uni bipalmari, etiam ipsæ bipalmares erunt. *Euclid. Axioma I.*

II.

Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia. Ut si singulis quantitatibus bipalmaribus æqualiter aliam palmarem adjicias, singulæ fiunt æqualiter tripalmares. *Axioma II.*

III.

Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia. Ut si à singulis tripalmaribus quantitatibus palmarem auferas quantitatem, relinquuntur æqualiter singulæ bipalmares. *Axioma III.*

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Ut si inæqualibus quantitatibus, quarum una ver: gra: sit bipalmaris, altera tripalmaris, singulis æqualiter adjicias palmarem quantitatem, quantitates semper inæquales fiunt, nempe una tripalmaris, altera quadripalmaris. *Axioma IV.*

V.

Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Ut si ab jisdem inæqualibus quantitatibus singulis palmarem auferas quantitatem, remanebunt ut priùs inæquales. *Axioma V.*

VI.

Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. *Axioma VI.*

Hoc

Hoc axioma intelligendum venit pro quantitatibus Rationem *excessùs* seu *maioris inæqualitatis* habentibus ad unam eamdemq; quantitatem. Ut si duæ quantitates sint ejusdem duplices, triplices, sesquialteræ &c: idest Rationem habeant duplam, triplam, sesquialteram &c uni tertiæ quantitati: erunt inter se æquales.

VII.

Axioma VII. *Et quæ ejusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.* Similiter hoc axioma est intelligendum pro quantitatibus Rationem habentibus *minoris inæqualitatis* seu *defectùs* ad unam eamdemque quantitatem. Ut si duæ quantitates ejusdem sint partes dimidiæ, tertiæ, quartæ &c: idest Rationem habeant subduplam, subtriplã, subsesquialteram &c uni tertiæ quantitati: erunt inter se æquales.

Ex his autem duobus Pronunciatis sic aliud conficitur:

VIII.

Quæ æqualium dupla sunt, tripla, quadrupla, dimidia &c, sunt inter se æqualia. Non magis enim æquales esse conceduntur duæ quantitates per hoc, quòd ad unam eamdemque quantitatem sint triplæ, duplæ, quadruplæ, dimidiæ &c; quàm per hoc, quòd sint triplæ, duplæ, quadruplæ, dimidiæ &c, ad plures æquales inter se quantitates: cùm necessariò in utraque comparatione consequi debet antecedentium æqualitas.

IX.

Axioma VIII. *Et quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia.* Ut si quantitas, quando intelligitur quantitati superponi, ita cum eâ totâ congruat, ut nec eam excedat, nec ab eâ excedatur, quantitates illæ necessariò erunt inter se æquales. Sic in omni jussâ superpositione, duarum linearum vel angulorum, vel superficierum, vel solidorum: si neutra quantitas alteram excedat, aut ab illâ excedatur: quantitates superpositæ mutuò congruere videntur, ideòque sunt inter se æquales.

Hinc à converso aliud pronunciatur axioma:

X.

Si rectæ aut anguli æquales fuerint, congruere poterunt: si nimirum una recta alteri rectæ superponatur;

vel

vel unus angulus alteri angulo, &c.

XI.

Totum est suâ parte majus. Evidentissimum est hoc Axioma, si benè percipiatur, quid pars, quid totum sit, ex dictis in priore Sectione *cap*.1.§.2.*n*.7. *Axioma IX.*

Nec obstat, quod calumniosè quidam objectare contendunt dicentes: nimis æquivocum, atque erroris, aut incertitudinis suspectum evadere Axioma in eâ *Rationis compositione*, quam Euclides definit *def*.5.6. & nos superiore Sectione explanavimus *cap*. 2. §. 2. *n*.46. ubi Ratio ex Rationibus composita nonnunquam minor est aliqua componente seu ingrediente Ratione, cùm scilicet componentes *disparis* fuerint *inæqualitatis* Rationes.

Non inquam officit. Nam tunc illa compositio non verè *Totum* condit; sed potius *partem* quotam prodit, quæ nempe remanet ex divisione componentium Rationum, & assumitur pro denominatore Rationis ex jis compositæ: non secus, ac si compositio fieret per quantitates positivas simul & negativas, quarum una destruit vel minuit aliam. Ut doctissimè refellit præclarus Doctor *Angelus Marchetti* Hetruscus Summi illius Geometræ, ac Philosophi *Alexandri* filius uterque in Pisanâ Academiâ Matheseos unicus, & celeberrimus Moderator, & mihi incomparabilis Amicus, in suo opusculo de Naturâ Rationis, & Proportionis vernaculo edito idiomate dicēs: Quòd si Rationi majoris inæqualitatis sive excessûs addere censeas Rationem minoris inæqualitatis seu defectûs, procul dubio falleris de intento; non enim esset vera additio, sed potius quædam subtractio. Quemadmodum si quis addere dicat Creditum 30 nummorum Debito 10 nummorum, re verâ non adderet, benè verò subducere t à Credito Debitum, ut diminutum remaneat Creditum jam 20 nummorum: Differentiam quidē potius eliceret, quàm Summā terminorū colligeret. Nā cùm una quātitas sit positiva, altera negativa, hæc destruit illam; sicque nullum conflare valēt *Totum* ex jis tamquam partibus verè compositum. Secus verò si simul fuerint Rationes excessûs, quia tunc veram efficerent compositionem requisitam ad conflandum *Totum*, de

quo

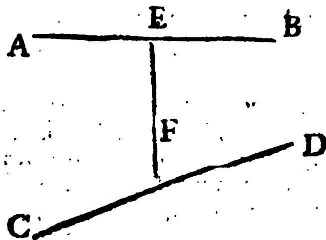
quo semper verificatur Axioma: quòd sitquavis suâ parte majus. Sed de his fusiùs suprà in Digressione *cap*.2.§.3.

XII.

Axioma X. *Item omnes recti anguli sunt inter se æquales*. Singulorum enim valor (ut dictum pluries habemus) semper est Quadrans Circuli, idest grad.90.

XIII.

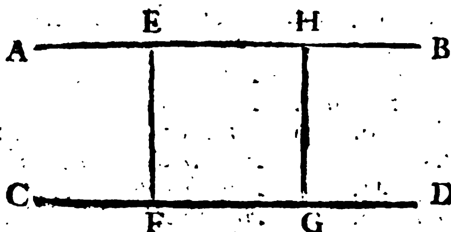
Axioma XI. *Et si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores*. Ut si in duas rectas A B, C D recta incidens E F faciat angulos *laterales* B E F, D F E duobus rectis minores, asserit Euclides, rectas illas, si in infinitum producantur absque dubio simul coincidere ad partes B, D, ad quas scilicet ipsi laterales anguli B E F D F E in amplitudinem surgunt.



Quod licèt verùm sit; tamen quia non videtur lumine naturali satis notum, quin ratiocinio indigeat, id potiùs demonstrabile Theorema, quàm evidens Axioma, censeri debere, plures contendunt Mathematici, eiusque loco P. Dechales aliud notius substituendum exhibet axioma.

Si

Si duæ lineæ parallelæ fuerint, omnes perpendiculares inter eas interceptæ æquales erunt.



Ut si duæ rectæ AB, CD fuerint parallelæ, inter quas ducantur EF, HG perpendiculares ad utramque parallelarum; satis notum est ex definitione parallelarum, tales perpendiculares æquales esse inter se, maximè quia distantias metiri solemus per lineas perpendiculares. ut dictum est suprà.

XIV.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt. Sed ad minus tres esse debent. *Axioma XII.*

XV.

Duæ rectæ lineæ non habent unum, & idem segmentum commune. Hoc est, quod duæ rectæ se mutuò secantes nullam lineæ partem possunt habere communem, præter solum punctum, in quo nempe fit earum sectio: aliàs alterutra recta non esset. Sicut & duæ planæ superficies se mutuò secantes nullam superficiei partem possunt habere communem, præter solam lineam, quæ est communis earum sectio, ut supra diximus *cap.4.§.2.n.21.* *Axioma XIII.*

Quæ hactenus legisti, amice Tyro, pro tua sint isagoge, meoque intento satis. Dum ergo majora tuo paro profectui in edendis Elementorum commentariis, DEUM velim exoratum; ut is, qui incæpit, ipse perficiat.

FINIS.

INDEX

Rerum notabilium, quæ in hoc Opusculo recensentur.

A

fol. num.

B

Ca-

Ma-

Per-

Ra-

Su-

F I N I S.

[illegible] 6 [illegible]

[illegible]

[illegible]

4 [illegible]

[illegible]

5 [illegible]

6 [illegible]

[illegible]

Quantitas discreta seu Numerus.

- Par, qui bifariam dividi potest.
  - Pariter impar ... tur
- Impar, qui solà unitate differt à pari.
  - Impariter impar ...
- Primus.
  - Absolutè dicitur, ... bet partem ...
  - Respectivè Primi ...
- Compositus.
  - Absolutè dicitur qui ... 15. &c.
  - Respectivè Composit...
- Planus est, qui ex multiplicatione duorum numerorum generatur.
  - Quadratus est, qui ra... numero m... dix est 4.

A R B

M L G N

- Quantitas continua, seu Magnitudo.
  - Linea
    - Secundùm
    - Secundùm accidens.
  - Superficies
    - Secundùm
    - Secundùm accidens.
  - Corpus. vide alterum de figuris.

[illegible]